デルタ関数と $\mathcal{L}_-$ ラプラス変換*

松尾孝美†

平成 21 年 11 月 19 日

1　$\mathcal{L}_-$ 変換の定義と意義

片側ラプラス変換は，$t < 0$ でゼロである信号 (因果性関数)，線形モデルおよび制御システムを解析するために広く用いられており，ほとんどの工学部学生に教えられている．工学部で，ラプラス変換を理解し，応用するための学生への授業に関して，いくつかの重大な落とし穴がある．

取扱のキーとなるのは，原点 ($t = 0$) の取扱である．多くの教科書では，時間関数 $f(t)$ のラプラス変換を, 積分の下限の意味を特定せずに，次式のように定義している．

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

平たく言うと，積分は原点を完全に含んでいるのか，部分的に含んでいるのか，または，全く含んでいないのか?この疑問は，後述されるデルタ関数やその微分値のような特異性が原点 $t = 0$ で起きるとき，決定的になる．

微分方程式の観点から，特異性は微分される信号の不連続性あるいは特異性をもつ入力により駆動されるシステムを対象とすることから発生する．過渡応答の解析は動的システムの授業のキーとなる話題であるので，原点での不連続性と特異性を取り扱う手法を教える必要がある．特に，片側ラプラス変換に基づくいかなる説明も原点をどのように取り扱うのか明確に特定しなければならない．

片側ラプラス変換を理解し応用するためには，学生は任意の入力と初期条件を取り扱う手法を学ぶ必要がある．片側ラプラス変換のいくつかの数学的取扱では，次式の $\mathcal{L}_+$ 形を用いる．

定義 1 ($\mathcal{L}_+$ 変換)

$$\mathcal{L}_+\{f(t)\} = \int_{0+}^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

これに対応する微分則は次式となる．

$$\mathcal{L}_+\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+) \tag{2}$$

しかしながら，$\mathcal{L}_+$ を用いると，単位インパルスの変換はゼロになってしまう!この結果は，線形システムのインパルス応答が非ゼロであることを正しく予想している学生たちを悩ませてしまう．

その代わりに，つぎの $\mathcal{L}_-$ 変換を与える．

定義 2 ($\mathcal{L}_-$ 変換)

$$\mathcal{L}_-\{f(t)\} = F(s) = \int_{0-}^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3}$$

ただし，積分領域は原点を完全に含んでおり，原点で起きる任意の特異性も含んでいる

*講義参考資料:人間システム制御工学 & 制御工学 I

†大分大学工学部福祉環境工学科メカトロニクスコース

(3) の定義より，つぎの微分則が得られる．

$$\mathcal{L}_-\{f'(t)\} = sF(s) - f(0-) \tag{4}$$

ここで，$t=0$ の前に存在する初期条件が解析に算入される．$f(0-)$ を f の事前初期値 (pre-initial value) という．

(1),(3) のどちらの定義を用いても，$t=0+$ での事後初期値 (post-initial value) を含むつぎの初期値定理が得られる．

$$\lim_{s\to\infty\cdot 1} sF(s) = f(0+) \tag{5}$$

ただし，記号 $s\to\infty\cdot 1$ は極限が正の実軸に沿って取られることを意味する．

定義 3 (収束域 (ROC)) 複素変数 $s=\alpha_0+j\omega_0$ の値において，$\mathcal{L}_+\{f(t)\}$ あるいは $\mathcal{L}_-\{f(t)\}$ の積分値が存在するとき，$\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$ のすべての s に対して，$\mathcal{L}_+\{f(t)\}$ あるいは $\mathcal{L}_-\{f(t)\}$ の積分値が存在する．そこで，$\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$ を $f(t)$ のラプラス変換の収束域 *(ROC)* という．

多くの本は微分特性 (2) を用いることにより，暗に $\mathcal{L}_+$ 変換を採用しているが，ラプラス積分の下限値が陽ではない．しかしながら，これらの本では，単位インパルス関数の変換を，$\mathcal{L}\{\delta\}=1$ としている．これは矛盾している．この矛盾は，デルタ関数が完全に $t=0$ の右側で起きるものとして定義することにより，回避される．しかし，デルタ関数が $t=0$ の右側で起きるならば，0+ は何を意味し，初期値定理 (5) はどの時刻に対応しているのかという問題が解決されずに残ってしまう．

これらのトラブルは，いやいや超関数の微分を用いることにより起きる．ここでは，超関数に基づき，不連続性関数の微分がデルタ関数を生じるという事実を取り込むことと，$\mathcal{L}_-$ 変換 (3) を使うことにより，上述のトラブルを回避できることを説明する．このようなことを書いている和書は少ないが，[5] にその記述が見られる．本原稿のベースとなっているのは，[1] である．

2 不連続関数の表現とステップ関数

単位ステップ関数は，つぎのように定義される．

定義 4 (単位ステップ関数)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & (t>0) \\ 0, & (t<0) \end{cases}$$

$t=0$ においては，$u(t)$ は不連続であり，その値は定義されていないが，無限大でない限り特に影響はないので，気にしなくて良い．図 1 に示すように，$u(t)$ の時間軸をシフトすることにより，各種時刻で不連続なステップ関数を表すことができる．

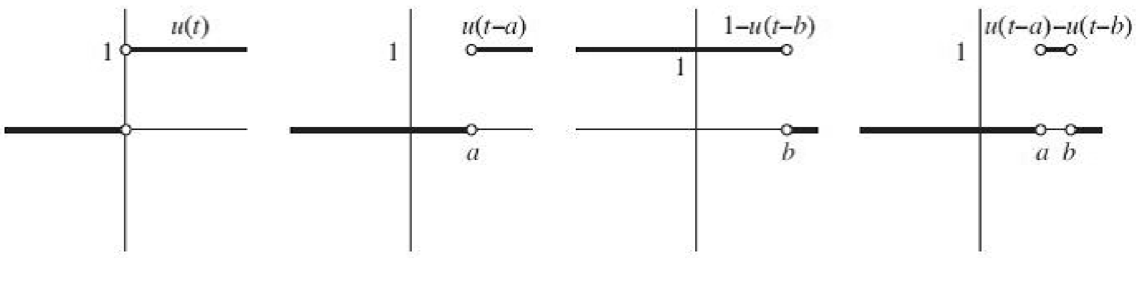

図 1: 不連続点の異なるステップ関数の例 [4]

単位ステップ関数を用いることにより，連続関数 $f(t)$ から，図 2 にあるように，不連続関数を作ることができる．ただし，$0 < a < b$ とする．

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & (t < a) \\ f(t), & (t > a) \end{cases}$$

$$u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0, & (t < a) \\ f(t-a), & (t > a) \end{cases}$$

$$(u(t-a)-u(t-b))f(t) = \begin{cases} 0, & (t < a) \\ f(t), & (a < t < b) \\ 0, & (t > b) \end{cases}$$

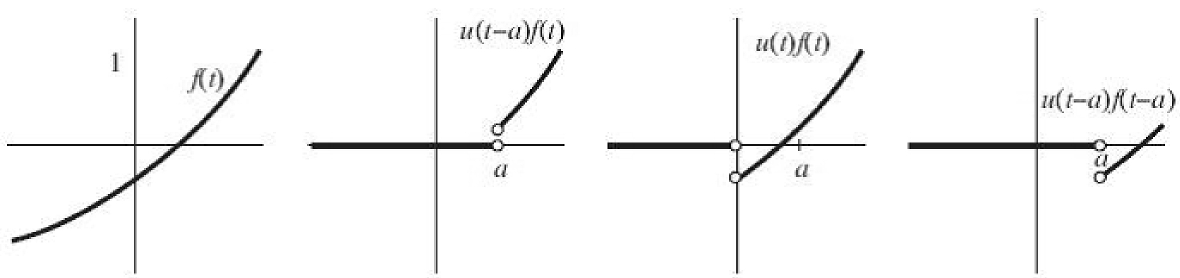

図 2: ステップ関数を用いた不連続関数の表現 [4]

ジャンプする不連続な関数は，つぎのように定義される．

定義 5 (ジャンプ不連続性) 関数 $f(t)$ が $t = a$ においてジャンプ連続性をもつとは，以下の *3* つが成立する場合をいう．

1. $f(t)$ が $[t_0, a)$ および $(a, t_1]$ で連続であるような $t_0 < a < t_1$ が存在する．
2. $\lim_{t \to a-} f(t)$ と $\lim_{t \to a+} f(t)$ の両方とも有限値で存在する．
3. $\lim_{t \to a-} f(t) \neq \lim_{t \to a+} f(t)$

また，区分的連続な関数は，つぎのように定義される．

定義 6 (区分的連続性) 関数 $f(t)$ が区分的連続であるとは，以下の *2* つが成立する場合をいう．

1. $f(t)$ はジャンプ不連続な点以外では連続である．
2. 任意の閉区間内のジャンプ不連続な点の個数は有限である．

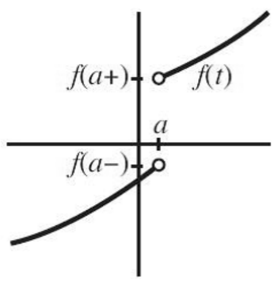

図 3: 区分的連続関数 [4]

3　片側ラプラス変換と両側ラプラス変換の関係

$t<0$ でゼロである信号を因果性関数というが，これは，$-\infty<t<\infty$ で，単位ステップ関数を用いて，次式のように書くことができる．

$$f(t)u(t)=\begin{cases} f(t), & (t>0) \\ 0, & (t<0) \end{cases}$$

$-\infty<t<\infty$ で定義される関数のラプラス変換は，次式の両側ラプラス変換で定義される．

定義 7 ($\mathcal{L}_b$ 変換)

$$\mathcal{L}_b\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{6}$$

因果性関数の両側ラプラス変換は，片側ラプラス変換に一致する．

$$\mathcal{L}_b\{f(t)u(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

両側ラプラス変換は，次式のように書きなおすことができる，

$$\mathcal{L}_b\{f(t)u(t)\}=\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

上式右辺第 2 項の片側ラプラス変換の収束域は一般に，$\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$ を書くことができるので，上式右辺第 1 項の積分の収束域は一般に,，$\mathrm{Re}(s)<\alpha_1$ という形で書ける．このため，両側ラプラス変換の収束域は一般に，$\alpha_0<\mathrm{Re}(s)<\alpha_1$ の形の帯状領域になる．

4　デルタ関数の定義と超関数

デルタ関数 (工学では，単位インパルス関数ということが多い，デルタ関数は物理学者 Dirac が定義した) は，通常の関数の積分の極限列として定義される．たとえば，つぎのような 2 つの関数を考える．

$$f_n(t) = \begin{cases} n, & (|t|<\frac{1}{2n}) \\ 0, & (\text{上記以外}) \end{cases} \tag{7}$$

$$g_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2n^2} \tag{8}$$

$f_n(t)$ は階段関数，$g_n(t)$ は平均 0，標準偏差 $\frac{1}{n}$ の正規分布の確率密度関数を意味している．どちらの関数も，各々の t に対して，次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=0, \lim_{n\to\infty} g_n(t)=0, \quad (t\neq 0) \tag{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\infty, \lim_{n\to\infty} g_n(0)=\infty, \quad t=0 \tag{10}$$

これらの関数の各点収束した極限である関数”もどき”(通常の関数ではないので”もどき”と言っている)

$$d(t)=\begin{cases} \infty, & (t=0) \\ 0, & (t\neq 0) \end{cases} \tag{11}$$

の 0 を挟んでの積分値はゼロである．なぜならば，図 4 に示すように，関数”もどき”$d(t)$ は，任意の $\epsilon>0$ に対して，高さ 1 の箱を無限に積み重ねることにより囲むことができる．関数”もどき”$d(t)$ の積分値は，この箱の無限列の面積より小さい．また，この箱の面積は，任意の $\epsilon>0$ に対して，

$$\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{4}\epsilon+\cdots\leq 2\epsilon$$

となるので，結局，関数”もどき”$d(t)$ の積分値は 0 になる．

しかしながら，各 n に対して関数を積分してやると，すべての n に対して，次式が成立することがわかる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 1 \tag{12}$$

したがって，積分の極限値についても，次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 1 \tag{13}$$

これは，結局，つぎのことを意味している．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt \neq \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(t)dt \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt \neq \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} g_n(t)dt \tag{15}$$

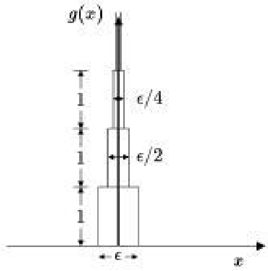

図 4: $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ を囲む箱

また，(13) より，次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\phi(t)dt = \phi(0) \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\phi(t)dt = \phi(0) \tag{17}$$

これは，次の積分に関する平均値の定理から導出できる．

定理 1 (平均値の定理) $f(t)$ が (a,b) において連続であるならば,

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a)$$

を満たす点 c, $(a < c < b)$ が少なくとも *1* つ存在する．

(証明は微積分のテキストを参照すること．)

これを用いると，例えば，$f_n(t)$ の場合には，次式が成立する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\phi(t)dt = n\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \phi(t)dt = n\frac{1}{n}\phi(c), \quad (-\frac{1}{2n} < c < \frac{1}{2n})$$

したがって，$n\to\infty$ とすると，(16) が導出される．

そこで,，(16) が成り立つ関数”もどき”を記号で $\delta(t)$ と書き，次のように定義するわけである．

定義 8 (デルタ関数) 任意の連続関数 $\phi(t)$ に対して，次式が成り立つような関数を**デルタ関数**という．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) \tag{18}$$

したがって，関数"もどき"$\delta(t)$ は，直接その値に意味があるわけではなく，普通の関数 ($\phi(t)$ のこと) を積分すると，数値になるという機能 (汎関数,functional という) をもっていると解釈できる．このような関数"もどき"を**超関数 (distribution)** という．

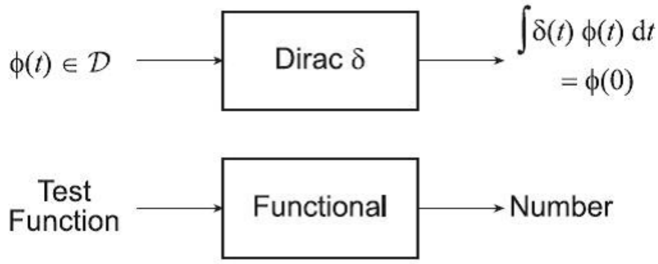

図 5: 超関数としてのデルタ関数

超関数を汎関数として，数学的に厳密に定義したのが，Schwarz である．

定義 9 (超関数) 数直線 R 上で定義された関数で，ある有限区間以外では *0* であり，無限回微分可能な関数の全体を D とし，これを**テスト関数**という．$\phi \in D$ で定義された汎関数 $T(\phi)$ が，つぎの線形性と連続性を満たすとき $T(\phi)$ を R における**超関数 (distribution)** という．

- 線形性:任意の $\alpha, \beta \in R, \phi_1, \phi_2 \in D$ に対して，$T(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha T(\phi_1) + \beta T(\phi_2)$
- 連続性:$\phi_n \to \phi$ ならば $T(\phi_n) \to T(\phi)$

そこで，次式が成り立つ超関数を**超関数としてのデルタ関数**という．

$$T_{\delta(t)}(\phi) = \phi(0) \tag{19}$$

また，次式も成立することがわかる．

$$T_{\delta(t-a)}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\phi(t)dt = \phi(a) \tag{20}$$

さらに，0 を挟まない積分では，任意の $\epsilon > 0$ に対して，次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-\epsilon} f_n(t)dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-\epsilon} g_n(t)dt = 0 \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\epsilon}^{\infty} f_n(t)dt = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\epsilon}^{\infty} g_n(t)dt = 0 \tag{22}$$

これより，次式が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \delta(t)dt = 0, \quad \int_{\epsilon}^{\infty} \delta(t)dt = 0, \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) = 1, \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\phi(t) = \phi(0) \tag{23}$$

また，デルタ関数は，偶関数であり，次式が成り立つ．

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{24}$$

これは，$\phi(t)$ はテスト関数で連続であるので，次式よりわかる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)\phi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(\tau)\phi(-\tau)(-d\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\phi(-\tau)d\tau=\phi(-0)=\phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt$$

任意のテスト関数 $\phi\in D$ に対して，$\phi(\pm\infty)=0$ であるので，形式的な部分積分計算から次式が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\phi(t)dt=[f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi'(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi'(t)dt$$

これをデルタ関数に適用して，つぎのようにデルタ関数の微分を定義する．

定義 10 (デルタ関数の微分)

$$T_{\delta'(t)}(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\phi(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi'(t)dt=-\phi'(0) \tag{25}$$

同様に，高階の微分が次式のように定義できる．

$$T_{\delta^{(n)}(t)}(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\phi(t)dt=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi^{(n)}(t)dt=-\phi^{(n)}(0) \tag{26}$$

このようにして定義されたデルタ関数とその微分 $\delta(t),\delta'(t),\delta''(t),\cdots$ をまとめて**特異関数 (singular function)** と呼ぶ．

さらに，一般の超関数の微分は，つぎのように定義する．

定義 11 (超関数の微分)

$$T'(\phi) = -T(\phi') \tag{27}$$

$$T^{(n)}(\phi) = (-1)^nT(\phi^{(n)}) \tag{28}$$

また，単位ステップ関数は，つぎのように定義されている．

$$u(t)=\begin{cases}1, & (t>0)\\ 0, & (t<0)\end{cases}$$

単位ステップ関数を超関数と見なして，その微分を定義すると，つぎのようになる．

定義 12 (単位ステップ関数の微分)

$$T_{u'(t)}(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}u'(t)\phi(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\phi'(t)dt=-\int_{0}^{\infty}\phi'(t)dt=\phi(0)-\phi(\infty)=\phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt=T_{\delta(t)}(\phi)$$

したがって，単位ステップ関数の超関数の意味での微分は，デルタ関数になることがわかる．

5 デルタ関数の演算

厳密には，超関数は汎関数としてしか値の意味を持たないが，これを通常の関数と同じような記法で表現すると，つぎのようになる．デルタ関数 $\delta(t)$ は単位ステップ関数 $u(t)$ の微分であるので，次式が成り立つ．

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

これを $(-\infty,b]$ で，定積分すると，次式となる．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{b}\frac{du(t)}{dt}dt &= \int_{-\infty}^{b}\delta(t)dt\\ u(b) &= \int_{-\infty}^{b}\delta(t)dt\end{aligned}$$

上式において，$b \geq 0+$ ならば，次式が成り立つこともわかる．

$$1 = \int_{-\infty}^{b} \delta(t)dt$$

さらに，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \frac{du(t-a)}{dt} &= \delta(t-a) \\ \int_{-\infty}^{b} \frac{du(t-a)}{dt} dt &= \int_{-\infty}^{b} \delta(t-a)dt \\ u(b-a) &= \int_{-\infty}^{b} \delta(t-a)dt \end{aligned}$$

これから，次式が成立することがわかる．

$$\int_{b}^{c} \delta(t-a)dt = \int_{-\infty}^{c} \delta(t-a)dt - \int_{-\infty}^{c} \delta(t-a)dt = u(c-a) - u(b-a)$$

$b < a < c$ のとき，1 であり，a が b と c の間にないとき，0 である．

超関数同士は必ずしも互いに掛け合わせることはできず，このような積はラプラス変換の応用において決して出てこない．しかしながら，$g(t)$ が滑らかな関数ならば，任意の超関数 $f(t)$ との積が定義でき，つぎの積則が一般的に成立する．

$$(f \cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \tag{29}$$

滑らかな $g(t)$ と $f(t) = \delta^{(n)}(t-a)$ に対して，上式の積則を用いて，$n = 1$ の場合を導出しよう．

$$\begin{aligned} g(t)\delta(t-a) &= g(a)\delta(t-a) \\ g'(t)\delta(t-a) &= g'(a)\delta(t-a) \\ (g(t)\delta(t-a))' &= g'(t)\delta(t-a) + g(t)\delta'(t-a) \\ (g(t)\delta(t-a))' &= (g(a)\delta(t-a))' = g(a)\delta'(t-a) \\ g(t)\delta'(t-a) &= g(a)\delta'(t-a) - g'(t)\delta(t-a) = g(a)\delta'(t-a) - g'(a)\delta(t-a) \end{aligned}$$

これを繰り返すことにより，次式が得られる．

$$g(t)\delta^{(n)}(t-a) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} g^{(k)}(a)\delta^{(n-k)}(t-a) \tag{30}$$

ただし，$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ である．この公式は，(30) は，積 $g(t)\delta^{(n)}(t-a)$ が意味をもつためには，滑らかな $g(t)$ が $g^{(n)}$ までの微係数をもち，$t = a$ で連続でなければならないことを意味している．

任意の滑らから関数 $g(t)$ と超関数 $f(t)$ に対して，積則を積分すると，次式の部分積分公式が得られる．

$$\int_{a-}^{b+} f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)|_{a-}^{b+} - \int_{a-}^{b+} f(t)g'(t)dt \tag{31}$$

(31) を $a = 0$ に適用するには，これらの関数の定義に含まれる $f(0-), g(0-)$ の値を用いる．滑らかさの定義から $g(0-) = g(0)$ であることがわかる．したがって，次式が成立する．

$$\int_{0-}^{b+} f'(t)g(t)dt = f(b+)g(b) - f(0-)g(0) - \int_{0-}^{b+} f(t)g'(t)dt \tag{32}$$

特に，上式で，$f(t) = \delta(t), b = \infty$ とすると，$\delta(\infty) = 0, \delta(0-) = 0$ であるので，次式のようになる．

$$\int_{0-}^{\infty} \delta'(t)g(t)dt = -\int_{0-}^{\infty} \delta(t)g'(t)dt = -g'(0) \tag{33}$$

無限区間の畳み込みは次式で定義される．

定義 13 (無限区間の畳み込み積分)

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

また，有限区間の畳み込み積分は，次式のように求められる．

$$\int_{-0}^{t} \delta(\tau - a)f(t-\tau)d\tau = \begin{cases} f(t-a) & \text{if } t > a \\ 0 & \text{if } t < a \end{cases} \tag{34}$$

さらに，すべての超関数 $f(t)$ に対して

$$\delta^{(n)}(t) * f(t) = f^{(n)}(t) \tag{35}$$

である．

(35) で，$f(t) = \delta^{(m)}(t)$ とすると，次式が得られる．

$$\delta^{(n)}(t) * \delta^{(m)}(t) = \delta^{(n+m)}(t)$$

特に，次式も成り立つ．

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

6 特異関数のラプラス変換

特異関数の $\mathcal{L}_-$ 変換は次式のようになり．

$$\mathcal{L}_-\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n \tag{36}$$

これは，デルタ関数の微分から，つぎのように計算できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_-\{\delta(t)\} &= \int_{0-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \\ \mathcal{L}_-\{\delta'(t)\} &= \int_{0-}^{\infty} \delta'(t)e^{-st}dt = -\int_{0-}^{\infty} \delta(t)(e^{-st})'dt = s \\ \mathcal{L}_-\{\delta^{(n)}(t)\} &= \int_{0-}^{\infty} \delta^{(n)}(t)e^{-st}dt = (-1)^n \int_{0-}^{\infty} \delta(t)(e^{-st})^{(n)}dt = s^n \end{aligned}$$

制御工学においては，特異関数を含むつぎの形の関数族を一般化関数と呼ぶ．

定義 14 (一般化関数, generalized function) 一般化関数 $f(t)$ は，次式のように，特異関数 $f_s(t)$ と区分的に連続で滑らかな関数 $f_r(t)$ の和からなる．

$$f(t) = f_r(t) + f_s(t) \tag{37}$$

ただし，$f_s(t) = \sum_{k,l} c_{k,l}\delta^{(l)}(t - a_k)$ であり，$\delta^{(n)}(t-a)$ に対して，最大の n が存在するものとする．

この関数に対して，ラプラス変換が存在するために，以下の仮定をおく．区分的に連続な関数 $f_r(t)$ に対しては，指数位の関数であること，つまり，すべての大きな t に対して，

$$|f_r(t)| < e^{Mt}$$

となる定数 M が存在し，また，$f_s(t)$ も指数位関数，つまり，すべての大きな k とすべての l に対して，

$$|c_{k,l}| < e^{Na_k}$$

となる定数 N が存在するものとする．

6.1 微分則

時間微分則 (4) は，$f'(t)$ に定義 (3) に適用した式

$$\mathcal{L}_-\{f'(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

から直接得ることができる．(32) にしたがって，部分積分すると，次式が得られる．

$$\int_{0-}^{\infty} f'(t)g(t)dt = f(\infty)g(\infty) - f(0-)g(0) - \int_{0-}^{\infty} f(t)g'(t)dt$$

ここで，$g(t) = e^{-st}, g'(t) = -se^{-st}$ を用いると，次式が得られる．

$$\int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = -f(0-)e^{0} + \int_{0-}^{\infty} f(t)se^{-st}dt = -f(0-) + s\mathcal{L}_-\{f(t)\}$$

超関数微分の記号的取扱を用いると，s が異常積分が収束するような十分大きな実部をもつと仮定すると，この公式は，指数位の任意の超関数に対して有効である．

6.1.1 微分則の例題

因果性関数の場合には，常に，$f(t) = 0,\ t < 0$ であるので，$\mathcal{L}_-$ 変換を用いる場合，$f(0-) =$ であるので，微分のラプラス変換は，次式のようになる．

$$\mathcal{L}_-\{f'(t)\} = sF(s) \tag{38}$$

次式の三角関数からなる因果性関数を考える．

$$f(t) = (\sin\omega t)u(t) = \begin{cases} \sin\omega t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{39}$$

ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

この関数の $\mathcal{L}_-$ 変換は，次式となる．

$$F(s) = \mathcal{L}_-\{f(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{40}$$

$\mathcal{L}_-$ 変換では，単純に s をかけることが，時間領域における微分演算に相当し，以下のようになる．

$$\begin{aligned} sF(s) &= \frac{s\omega}{s^2+\omega^2} = \omega\frac{s}{s^2+\omega^2} \\ s^2F(s) &= \frac{s^2\omega}{s^2+\omega^2} = \omega - \frac{\omega^3}{s^2+\omega^2} \\ s^3F(s) &= \frac{s^3\omega}{s^2+\omega^2} = s\omega - \frac{s\omega^3}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

上式が，(39) から求めた微分値の $\mathcal{L}_-$ 変換と一致することが，以下のように確認できる．$(\sin\omega t)\delta(t) = 0$ であることに注意すると，$f'(t), f''(t), f'''(t)$ は次式のようになる．

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\sin\omega t)u'(t) + \omega(\cos\omega t)u(t) = \sin\omega t\delta(t) + \omega(\cos\omega t)u(t) = \omega(\cos\omega t)u(t) \\ f''(t) &= \omega(\cos\omega t)u'(t) - \omega^2(\sin\omega t)u(t) = \omega(\cos\omega t)\delta(t) - \omega^2(\sin\omega t)u(t) \\ f'''(t) &= -\omega^2(\sin\omega t)\delta(t) + \omega(\cos\omega t)\delta'(t) - \omega^2(\sin\omega t)\delta(t) - \omega^3(\sin\omega t)u(t) = \omega(\cos\omega t)\delta'(t) - \omega^3(\sin\omega t)u(t) \end{aligned}$$

また，(33) に注意すると，

$$\begin{aligned} \int_{0-}^{\infty} e^{-st}\cos\omega t\delta(t)dt &= e^{-st}\cos\omega t\big|_{t=0} = 1 \\ \int_{0-}^{\infty} e^{-st}(\cos\omega t)\delta'(t)dt &= -\left(e^{-st}(\cos\omega t)\right)'\big|_{t=0} = s \end{aligned}$$

であるので，上式をラプラス変換すると，次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-}\{f'(t)\} &= \omega\frac{s}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}_{-}\{f''(t)\} &= \omega-\frac{\omega^3}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}_{-}\{f'(t)\} &= s\omega-\frac{s\omega^3}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

6.2 初期値定理

初期値定理 (5) はもっと正確には，事後初期値定理である．なぜならば，$t=0+$ での結果であるからである．しなしながら，事前初期値定理はないので，従来どおりに，単に初期値定理と呼ぶことにする．この結果は，他の洞察を与えるいくつかの手法により導出することができる．以下に，微分則の通常の応用と初期特異公式 (initial singularity formula) に基づく 2 つ手法を示す.

初期値定理は，$F(s)$ が $s\to\infty\cdot 1$ のときにゼロに収束するのではなく，

$$
F(s)=\tilde{F}(s)+\sum_{n=1}^{N}a_n s^n
$$

と書ける場合の状況に拡張することができる．ただし，関数 $\tilde{F}(s)$ は $s\to\infty\cdot 1$ のとき，ゼロに収束するとする．この場合，f の事後初期値は，次式で与えられる．

$$
\lim_{s\to\infty\cdot 1} s\tilde{F}(s)=f(0+)
$$

言い換えると，$f(t)$ における特異関数の出現は，$t=0+$ での通常の極限の定義を不可能にするものではなく，この極限値はラプラス変換から得られる．

6.2.1 微分則の性質

初期値定理は，微分則 (4)，つまり，

$$
sF(s)=\int_{0-}^{\infty}f'(s)e^{-st}dt+f(0-)
$$

より，導出することができる．実軸上で，s の無限大の極限をとると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty\cdot 1} sF(s) &= \lim_{s\to\infty\cdot 1}\left(\int_{0-}^{\infty}f'(s)e^{-st}dt\right)+f(0-) \\
&= \lim_{s\to\infty\cdot 1}\left(\int_{0-}^{0+}f'(s)e^{0}dt+\int_{0+}^{\infty}f'(s)e^{-st}dt\right) \\
&\quad +f(0-) \\
&= \lim_{s\to\infty\cdot 1}\left(f(t)|_{0-}^{0+}+0\right)+f(0-) \\
&= f(0+)
\end{aligned}
$$

6.2.2 初期特異値定理

$f(t)$ をは $t=0$ における特異部分が $b\delta(t)$ である超関数とする．このとき，次式がなりたつ．

$$
\lim_{s\to\infty\cdot 1}F(s)=b
$$

これは，s が大きな実数の値であるときの $F(s)$ の値を見ていることを意味する．このことは，$f(t)$ を正規部分と特異部分に分解するとわかる．正規部分 $f_r(t)$ は指数位でありと仮定しているので，そのラプラス変換は，$s \to \infty \cdot 1$ で消失する．$f(t)$ の各デルタ関数 $\delta(t-a)$ のラプラス変換は，e^{-as} であるので，$a > 0$ であるかぎり，$s \to \infty \cdot 1$ のとき，同様にゼロになり，$a = 0$ のときのみが，残ることになるからである．

初期値定理は，いわゆる Initial-Singularity Theroem の特殊な場合である．これは，s は実数で増加するとき，$f(t)$ の $t = 0$ のときの特異部分に関する情報をもった多項式に漸近することを主張するものである．ここで，次式が成り立つとき，$F(s) \sim G(s)$ と書くことにする．

$$\lim_{s \to \infty \cdot 1} (F(s) - G(s)) = 0$$

このとき，Initial-Singularity Theroem は，以下のことを主張する．もし，$t = 0$ における $f(t)$ の特異部分が

$$\sum_l c_l \delta^{(l)}(t)$$

であるならば，$F(s) = \mathcal{L}_-\{f(t)\}$ のとき，次式が成立する．

$$F(s) \sim \sum_l c_l s^l$$

これは，関係 $\mathcal{L}_-\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$ と

$$\lim_{s \to \infty \cdot 1} \mathcal{L}_-\{f_r(t)\} = 0$$

とすべての $a > 0$ に対して，

$$\lim_{s \to \infty \cdot 1} \mathcal{L}_-\{\delta^{(n)}(t-a)\} = 0$$

からわかる．

Initial-Singularity Theroem を $f'(t)$ に適用することにより，初期値定理が得られる．$t = 0$ における $f'(t)$ の特異部分は次式のようになる．

$$(f(0+) - f(0-))\delta(t) + \sum_l c_l \delta^{(l+1)}(t)$$

また，そのラプラス変換は次式となる

$$(f(0+) - f(0-)) + \sum_l c_l s^{(l+1)}$$

時間微分則 (4) より，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0-) &= \mathcal{L}_-\{f'(t)\} \\ &\sim (f(0+) - f(0-)) + \sum_l c_l s^{(l+1)} \end{aligned}$$

$f(0-)$ をキャンセルすると，次式のようになる．

$$sF(s) \sim f(0+) + \sum_l c_l s^{(l+1)}$$

特に，$f(t)$ が $t = 0$ で特異でなければ，次式が成り立つ．

$$\lim_{s \to \infty \cdot 1} sF(s) = f(0+)$$

上記の議論から，一般的に，$f(0+)$ はラプラス変換式から直接読み取ることができる．つまり，$F(s)$ が多項式と $s \to \infty \cdot 1$ のときゼロに収束する $\tilde{F}(s)$ の和であるならば，次式が成り立つ．

$$\lim_{s \to \infty \cdot 1} s\tilde{F}(s) = f(0+)$$

たとえば，つぎの 1 次のラプラス変換式を考える．

$$F(s) = \frac{s+a}{s+b} = 1 + \frac{a-b}{s+b}$$

この式は，たとえ $f(t)$ が $t=0$ でインパルスを持ったとしても，事後初期値は $f(0+) = a-b$ であることが，上述の結果あるいか，直接逆変換するとわかる．

6.3　最終値定理

$f(t)$ は有限個の不連続性ともち，その特異部分は有限個のデルタ関数のみをもつと仮定する．もし，$F(s)$ のすべての極が左半面にあるならば，次式が成り立つ．

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

また，$s=0$ に単極をもち，他の極はすべて左半面にあるならば，次式が成り立つ．

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \mathrm{Res}_{s=0} F(s) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

ここで，$\mathrm{Res}_{s=0}$ は $s=0$ における留数を意味する．ほかの状況は，$\lim_{t\to\infty} f(t)$ が存在しないか，$f(t)$ が減衰無しの振動か，$|f(t)|$ が発散するかである．

最終値公式からより広いクラスの $f(t)$ に対して，$t \to \infty$ のときの $f(t)$ の挙動を記述してみよう．$F(s)$ の最も右 (rightmost) の極は a よりも厳密に小さい実部をもつと仮定する．$s-$ シフト則から，$e^{-at}f(t)$ のラプラス変換は，$F(s+a)$ である．$F(s+a)$ の極配置は，複素平面上で a だけ左にシフトされている以外は，$F(s)$ の極配置と同じである．したがって，すべての極は左半面にあるので，$\lim_{t\to\infty} e^{-at}f(t) = 0$ である．これは，$a > 0$ の場合には，$f(t)$ は e^{at} よりも遅く増大し，$a < 0$ の場合には，e^{at} よりも速く減衰することを意味している．

同様に，$F(s)$ が 1 つの極が実数の a で，他のすべての極の実部はそれよりも小さいならば，次式が成り立つ．

$$\lim_{t \to \infty} e^{-at} f(t) = \mathrm{Res}_{s=a} F(s) = \lim_{s \to a} (s-a) F(s)$$

つまり，極 $s=a$ が単極で，留数が有限ならば，$f(t)$ は指数関数 e^{-at} に定数をかけたものと同じように発散するか，減衰する．

他方，実でない最も右の極があるならば (この場合，実関数 $f(t)$ では，複素共役の極をもつ)，関数は振動する．もし，1 つの最も右の複素共役極 $a \pm j\omega$ を持つならば，$f(t)$ は近似的に各周波数 ω で振動し，e^{-at} と同じ速さで発散するか，減衰する．たとえば，$f(t) = \cos\omega t$ のとき，$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ であり，$a > 0$ に対して次式が成立する．

$$\lim_{t \to \infty} e^{-at} f(t) = \lim_{s \to a} (s-a) \frac{s}{s^2+\omega^2} = 0$$

7　0^-,0, 0^+ の違いを見る例題

片側ラプラス変換は，たいてい微分方程式の解と関連付けられているが，$0-, 0, 0+$ を区別することは動的システムの議論とは別のものである．不連続関数 $f(t)$ に対して，導関数 $f'(t)$ は $f(t)$ 超関数の意味での微分として解釈しなければならない，これは，$f(t)$ が不連続な任意の点 t_0 に対して，次式の特異関数を含んでいる．

$$(f(t_0^+) - f(t_0^-))\delta(t - t_0)$$

特に，$f(0-) \neq f(0+)$ であるならば，導関数は原点でデルタ関数を含んでいる．

つぎの例で，3 つの信号とその導関数に対して片側ラプラス変換を行う．この例は，ラプラス変換 (3) と性質 (4),(5) を用いる必要性が，信号とそれらの変換を適切に定義する案件であり，微分方程式の解と関連しているわけでないことを示すものである．

すべての時刻で定義される 3 つの信号 $f(t), g(t), h(t)$ を考える．図 6 には，$a = 1$ の場合が示されている．

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-at} \\ g(t) &= e^{-at}u(t) \\ h(t) &= e^{-at}u(t) - u(-t) \end{aligned}$$

3 つの関数は非特異で，正の時刻で一致するので，(3) の意味でのラプラス変換は一致する．しかしながら，その導関数は $t = 0$ においてインパルス値を含むので，導関数のラプラス変換は異なるはずである．ラプラス変換の性質の選択はこれらの信号とその導関数に適用するとき，矛盾なく正しい結果を与えなければならない．

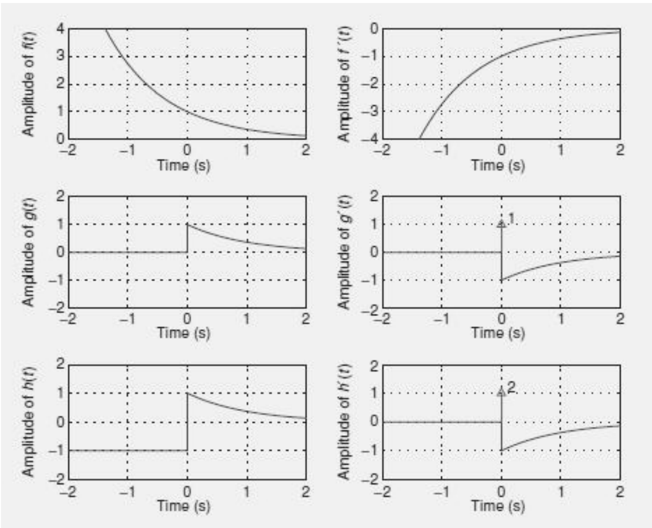

図 6: Three functions $f(t) = e^{-at}$,$g(t) = e^{-at}u(t)$,$h(t) = e^{-at}u(t) - u(-t)$, and their derivatives, plotted for $a = 1$ and defined for all time. Impulses are represented by the arrows, with the impulse area denoted by the number next ti the arrowhead. Since all three functions are identical for positive time, they have identical unilateral Laplace transforms. However, their derivatives differ at the origin. Therefore, the Laplace transforms of their derivatives also differ.[1] より引用.

7.1 $f(t)$ の性質

事前初期値 $f(0-) = 1$ である関数 $f(t) = e^{-at}$ を考える．$f(t)$ のラプラス変換は，次式である．

$$F(s) = \mathcal{L}_{-}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$f(t)$ の導関数は

$$f'(t) = -ae^{-at}$$

であり，そのラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}_{-}\{-ae^{-at}\} = \frac{-a}{s+a}$$

微分則 (4) を用いると，次式のように同じ結果が得られる．

$$\mathcal{L}_{-}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0-) = \frac{s}{s+a} - 1 = \frac{-a}{s+a}$$

初期値定理から次式が得られる．

$$\begin{aligned} f(0+) &= \lim_{s\to\infty\cdot 1} sF(s) = \lim_{s\to\infty\cdot 1} \frac{s}{s+a} = 1 \\ f'(0+) &= \lim_{s\to\infty\cdot 1} \frac{-sa}{s+a} = -a \end{aligned}$$

7.2 $g(t)$ の性質

事前初期値 $g(0-) = 0$ である関数 $g(t) = e^{-at}u(t)$ を考える．$g(t)$ のラプラス変換は $f(t)$ と同じであり，次式となる．

$$G(s) = \mathcal{L}_{-}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

しかしながら，その時間微分は，原点でインパルスを含み，次式で表される．

$$g'(t) = \delta(t) - ae^{-at}u(t)$$

その時間微分のラプラス変換は，次式となる．

$$\mathcal{L}_{-}\{g'(t)\} = 1 - \frac{a}{s+a} = \frac{s}{s+a}$$

これは，(41) と異なる．微分則 (4) を用いると，次式が得られる．

$$\mathcal{L}_{-}\{g'(t)\} = sG(s) - g(0-) = \frac{s}{s+a} - 0 = \frac{s}{s+a}$$

初期値定理から，次式が得られる．

$$g(0+) = \lim_{s\to\infty\cdot 1} sG(s) = \lim_{s\to\infty\cdot 1} \frac{s}{s+a} = 1$$

もっと一般的初期値定理をつぎのように導関数の変換に適用することができる．非特異部分を展開すると，

$$J(s) = \mathcal{L}_{-}\{g'(t)\} = \frac{s}{s+a} = 1 - \frac{a}{s+a} = 1 + \tilde{J}(s)$$

これから，次式が得られる．

$$g'(0+) = \lim_{s\to\infty\cdot 1} s\tilde{J}(s) = -a$$

7.3 $h(t)$ の性質

事前初期値 $h(0-) = -1$ のつぎの関数を考える．

$$h(t) = e^{-at}u(t) - u(-t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$$

このラプラス変換は，$f(t), g(t)$ を同じである．時間微分を計算すると，次式となる．

$$h'(t) = 2\delta(t) - ae^{-at}u(t)$$

このラプラス変換は次式のようになる．

$$\mathcal{L}_{-}\{h'(t)\} = 2 - \frac{a}{s+a} = \frac{2s+a}{s+a}$$

また，微分則 (4) を用いると，次式が得られる．

$$\mathcal{L}_{-}\{h'(t)\} = sH(s) - h(0-) = \frac{s}{s+a} + 1 = \frac{2s+a}{s+a}$$

8　微分方程式の解法

デルタ関数の含まれる微分方程式のラプラス変換を用いた解法をいくつか紹介する．

例 1

$$\frac{dy}{dt} = -ay + \delta(t), \quad y(0) = 0 \tag{41}$$

(導出)
$y(0)$ は $\mathcal{L}_-$ 変換では，$y(0-)$ として取り扱う．上式を $\mathcal{L}_-$ 変換し，逆変換 (本来は，逆変換は複素積分であるが，簡単のため，付録のラプラス変換公式を逆に見る) すると，次式のようになる．ただし，$Y(s) = \mathcal{L}_-\{y(t)\}$ とする．

$$sY(s) - y(0-) = aY(s) + 1 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s+a} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-at}u(t)$$

■

例 2

$$\frac{dy}{dt} = -ay + \delta(t), \quad y(0) = -1 \tag{42}$$

(導出)
$y(0)$ は $\mathcal{L}_-$ 変換では，$y(0-)$ として取り扱う．

$$sY(s) - y(0-) = aY(s) + 1 \quad \Rightarrow \quad (s+a)Y(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0$$

■

例 3

$$\frac{dy}{dt} = -ay + \delta(t-b), \quad y(0) = 0, \quad b > 0 \tag{43}$$

(導出)
$y(0)$ は $\mathcal{L}_-$ 変換では，$y(0-)$ として取り扱う．

$$sY(s) - y(0-) = aY(s) + e^{-bs} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-bs}}{s+a} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-a(t-b)}u(t-b)$$

■

例 4

$$\frac{dy}{dt} = -ay + u(t), \quad y(0) = y_0 \tag{44}$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay + u(t) + y_0\delta(t), \quad y(0) = 0 \tag{45}$$

(導出)
$y(0)$ は $\mathcal{L}_-$ 変換では，$y(0-)$ として取り扱う．(44) の解は次式のようになる．

$$sY(s) - y_0 = -aY(s) + \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s(s+a)} + \frac{y_0}{s+a} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-at}y_0u(t) + (1-e^{-at})u(t)$$

(45) の解は次式のようになり，(44) の解と一致する．

$$sY(s) = -aY(s) + \frac{1}{s} + y_0 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s(s+a)} + \frac{y_0}{s+a} \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-at}y_0u(t) + (1-e^{-at})u(t)$$

■

例 5

$$y'' + 2y' - 15y = 6\delta(t-9), \quad y(0) = -5, y'(0) = 7 \tag{46}$$

(導出)

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 2(sY(s) - y(0)) - 15Y(s) = 6e^{-9s} \quad \Rightarrow \quad (s^2+2s-15)Y(s) + 5s + 3 = 6e^{-9s} \\
&Y(s) = \frac{6e^{-9s}}{(s+5)(s-3)} - \frac{5s+3}{(s+5)(s-3)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = 6e^{-9s}F(s) - G(s)
\end{aligned}$$

ここで，$F(s), G(s)$ は次式のように，部分分数展開を利用して，逆ラプラス変換できる．

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{(s+5)(s-3)} = \frac{1/8}{s-3} - \frac{1/8}{s+5} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{8}(e^{3t} - e^{-5t}) \\
G(s) &= \frac{5s+3}{(s+5)(s-3)} = \frac{9/4}{s-3} + \frac{11/4}{s+5} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \frac{9}{4}e^{3t} + \frac{11}{4}e^{-5t}
\end{aligned}$$

したがって，$y(t)$ は次式のようになる．

$$y(t) = 6f(t-9)u(t-9) - g(t)$$

9 線形時不変システム

たいていの物理システムは，ある原因とその結果の間の関係を研究することに帰着される．任意のシステムは，原因 $x(t)$ が入力として与えられたとき，その結果 $y(t)$ を出力として一意的に生ずる変換器と考えることができる [6]．そこで，これを次式のように表すことにする．

$$y(t) = \mathcal{S}(x(t))$$

たとえば，バネ質点系の場合，$x(t)$ が外力であり，$y(t)$ が質点の変位となるとき，$y(t)$ は強制項 $x(t)$ を持つ 2 階微分方程式の解となる．

図 7: 線形時不変システム

一般にシステムは複雑であるが，以下の線形性と時不変性を有するとき，取扱は比較的簡単になる．

定義 15 (線形性) 入力 $x_1(t)$ に対する出力を $y_1(t)$，入力 $x_2(t)$ に対する出力を $y_2(t)$ とし，a_1, a_2 を任意の定数とするとき，入力 $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ に対する出力が $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ になるとき，システムは線形であるという．

定義 16 (時不変性) 入力 $x(t)$ に対する出力を $y(t)$ とするとき，入力 $x_1(t-t_1)$ に対する出力が $y_1(t-t_1)$ になるとき，システムは時不変であるという．

線形性と時不変性の両方を満たすシステムを，線形時不変システム (Linear Time-Invariant System, LTI System) という．

10　畳み込み積分のラプラス変換

10.1　4 種類の畳み込み積分の定義

無限および有限積分区間の畳み込み積分として，つぎのようなものが定義できる．

- 両無限区間の畳み込み積分:

$$g(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{47}$$

- 片無限区間の畳み込み積分:

$$g(t) \star v(t) = \int_{-\infty}^{t+} g(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_{0-}^{\infty} g(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{48}$$

$$g(t) \odot v(t) = \int_{0-}^{\infty} g(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t+} g(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{49}$$

- 有限区間の畳み込み積分:

$$g(t) \otimes v(t) = \int_{0-}^{t+} g(\tau)v(t-\tau)d\tau = \int_{0-}^{t+} g(t-\tau)v(\tau)d\tau \tag{50}$$

ただし，畳み込み積分の一般的記号は，$*$ であり，$\star, \odot, \otimes$ はこの資料で区別のためにつけた記号であるので，注意すること．なお，$\star, \odot, \otimes$ は，各々，$g(\tau)$ が以下の場合の $*$ の特殊形である．

- $\star$ の場合:$g(\tau) = 0 \quad (\tau > t)$
- $\odot$ の場合:$g(\tau) = 0 \quad (\tau < 0)$
- $\otimes$ の場合:$g(\tau) = 0 \quad (\tau > t, \tau < 0)$

10.2　畳み込み積分の意味と因果系

畳み込み積分を線形時不変系の出力として解釈する．ただし，入力がゼロの場合，出力の $t = 0$ の値は $y(0\pm) = 0$ とする．図 8 の上部の箱は，右側から入力 $v(t)$ が入ったときに，左側に出力 $y(t)$ が発生するものとして描いている．

今，高さ $1/T$，幅 T のパルス $\delta_T(t-nT)$ を，単位ステップ関数 $u(t)$ を用いて，次式のように定義する (図 8 参照).

$$\delta_T(t-nT) = \frac{u(t-nT) - u(t-(n+1)T)}{T}$$

入力 $\delta_T(t)$ に対するを線形時不変系の出力を $g_T(t)$ とおく．時不変系とは，入力を時間シフトしたときの出力も時間シフトしたものになる系のことである．つまり，入力 $\delta_T(t-nT)$ に対するを線形時不変系の出力を $g_T(t-nT)$ になる (図 8 参照)．また，線形系とは，入力の線形和は，各々の入力に対する出力の線形和になる系のことである．つまり，入力 $a\delta_T(t) + b\delta_T(t-nT)$(a,b は定数) に対する線形時不変系の出力は $ag_T(t) + bg_T(t-nT)$ になる．そこで，一般の入力 $v(t)$ をこのパルスを用いて，図 9 のように近似すると

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{T\to 0} \tilde{v}_T(t) \\ \tilde{v}_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT)\left(\frac{u(t-nT) - u(t-(n+1)T}{T}\right)T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT)\delta_T(t-nT)T \end{aligned}$$

入力 $\tilde{v}_T(t)$ に対する上述の線形時不変系の出力 $\tilde{y}(t)$ は，次式のように書くことができる．

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT)g_T(t-nT)T$$

ここで,

$$\lim_{T\to 0}\delta_T(t-nT)=\frac{du(t-nT)}{dt}=\delta(t-nT)$$

であるので，$T\to 0$ のときの入力と出力の極限は以下のようになる．

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{T\to 0}\tilde{v}_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}v(\tau)\delta(t-\tau)d\tau &(51)\\ y(t) &= \lim_{T\to 0}\tilde{y}_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}v(\tau)g(t-\tau)d\tau &(52)\end{aligned}$$

特に，入力がデルタ関数 (単位インパルス関数)$\delta(t)$ であるとき，出力は,

$$y_\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)g(t-\tau)d\tau=g(t)$$

であり，$g(t)$ は線形時不変系のインパルス応答と呼ばれる．(52) が入力 $v(t)$ に対する線形時不変系の出力になり，これが入力 $v(t)$ とインパルス応答 $g(t)$ の $*$ 畳み込み積分となっていることがわかる．

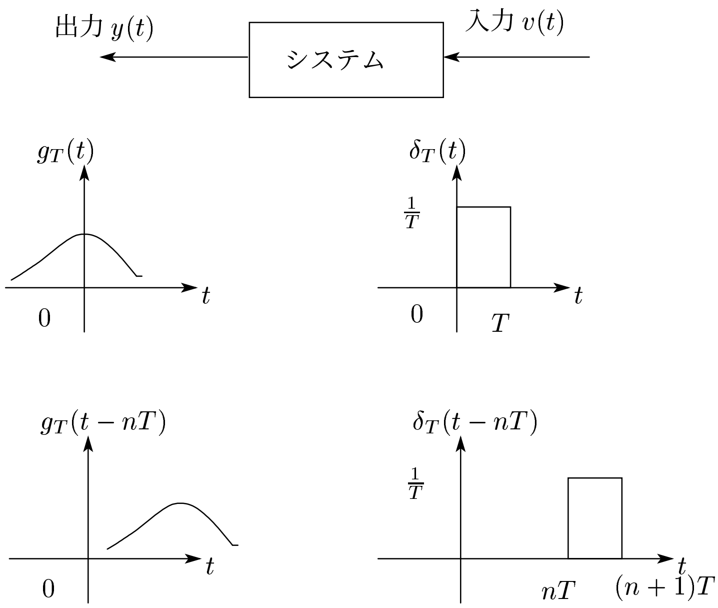

図 8: Impulse response.

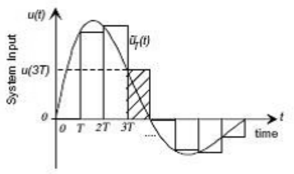

図 9: Staircase approximation to a continuous input function.

さらに，インパルス応答 $g(\tau)$ が次式を満たすとき，つまり，$g(t)$ が因果性関数のとき，その線形時不変系は因果的である (causal) という.

$$g(\tau)=0\quad(\tau<0)$$

したがって，因果的線形時不変系の出力は $y(t)=g(t)\otimes v(t)$ 畳み込み積分で書くことができる．これは，現時刻 t の出力が未来 $\tau>t$ の入力 $v(\tau)$ に無関係であることを意味している．つまり，現時点を $t=0$ として，デルタ関数を入力としたとき，発生する出力が $g(t)$ になるが，過去の時刻 $(t<0)$ では，出力はゼロであるので，過去に影響を与えない．

$g(t),v(t)$ 共に因果性関数の場合，これを単位インパルス関数を用いて，$g(t)u(t),v(t)u(t)$ を書き直して，$*$ 畳み込み積分すると，次式のように，$\otimes$ 畳み込み積分と一致することがわかる．

$$(g(t)u(t))*(v(t)u(t))=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)u(\tau)v(t-\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0-}^{t+}g(t-\tau)v(\tau)d\tau=(g(t)u(t))\otimes(v(t)u(t)) \tag{53}$$

例 6 次の微分方程式の初期値問題を考える．ただし，$v(t)$ を入力とし，$y(t)$ を出力とし，a は定数とする．

$$\frac{dy(t)}{dt}=-ay(t)+v(t),\quad y(0-)=0$$

この微分方程式の解は，次式で与えられる．

$$y(t)=e^{at}y(0-)+\int_{0-}^{t}e^{a(t-\tau)}v(\tau)d\tau=\int_{0-}^{t}e^{a(t-\tau)}v(\tau)d\tau=e^{at}\otimes v(t)=(e^{at}u(t))\otimes(v(t)u(t))$$

10.3 畳み込み積分 $*$ のラプラス変換

$v(t)$ を入力とすると，$g(t)*v(t)$ は，$t<0$ でも $v(t)\neq 0$ である場合の畳み込みを表している．この場合には，両側ラプラス変換をこの関数に対するラプラス変換としなければならない．

$$\mathcal{L}_{+b}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{54}$$

この場合次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{+}b\{g(t)*v(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)v(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v(t-\tau)e^{-st}dt\right)g(\tau)d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v(l)e^{-s(l+\tau)}dl\right)g(\tau)d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v(l)e^{-sl}dl\right)e^{-s\tau}g(\tau)d\tau\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}v(l)e^{-sl}dl\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s\tau}g(\tau)d\tau\\
&= \mathcal{L}_{+b}\{g(t)\}\mathcal{L}_{+b}\{v(t)\}
\end{aligned}$$

この式は，$-\infty<t<\infty$ で値をもつ $g(t),v(t)$ に対して成り立つことがわかる．

10.4 畳み込み積分 $\star$ のラプラス変換

$t<0$ で $v(t)=0$ である場合に相当するので，$\mathcal{L}_{-}$ ラプラス変換を施すと，次式のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-}\{g(t)*v(t)\} &= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{\infty}g(\tau)v(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt\\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{\infty}v(t-\tau)e^{-st}dt\right)g(\tau)d\tau\\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{-\tau-}^{\infty}v(l)e^{-s(l+\tau)}dl\right)g(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{\infty} v(l)e^{-sl}dl\right)e^{-s\tau}g(\tau)d\tau \\
&= \int_{0-}^{\infty} e^{-s\tau}g(\tau)d\tau\int_{0-}^{\infty} v(l)e^{-sl}dl \\
&= \mathcal{L}_{-}\{g(t)\}\mathcal{L}_{-}\{v(t)\}
\end{aligned}
$$

ここで，最後の式において，$\mathcal{L}_{-}\{g(t)\}$ が含まれていることから，$g(t)$ についても，$t<0$ で $g(t)=0$ が前提となっていることになる．つまり，この場合には，$g(t)*v(t)$ は $g(t)\otimes v(t)$ に等しいことになる．

10.5　畳み込み積分 $\odot$ のラプラス変換

$t<0$ で $v(t)=0$ である場合には，$g(t)\odot v(t)$ は $g(t)\otimes v(t)$ に等しいので，ここでは取り扱わない．

10.6　畳み込み積分 $\otimes$ のラプラス変換

$t<0$ で $v(t)=0$ である場合に相当するので，$\mathcal{L}_{-}$ ラプラス変換を施すと，次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-}\{g(t)\otimes v(t)\} &= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{t+} g(\tau)v(t-\tau)d\tau\right)e^{-st}dt \\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{t+} g(\tau)v(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)e^{-st}dt \\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{\infty} g(t-l)v(l)u(t-l)dl\right)e^{-st}dt \\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{\infty} g(t-l)u(t-l)e^{-st}dt\right)v(l)dl \\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{-l-}^{\infty} g(w)u(w)e^{-s(w+l)}dt\right)v(l)dl \\
&= \int_{0-}^{\infty}\left(\int_{0-}^{\infty} g(w)e^{-sw}dt\right)e^{-sl}v(l)dl \\
&= \int_{0-}^{\infty} e^{-sw}g(w)dw\int_{0-}^{\infty} v(l)e^{-sl}dl \\
&= \mathcal{L}_{-}\{g(t)\}\mathcal{L}_{-}\{v(t)\}
\end{aligned}
$$

これが因果的線形時不変系の畳み込みとなる．

11　最終値定理の拡張

ここの内容は発展編であるので，難しければ読み飛ばして構わない．この部分のベースとなっているのは，[2, 3] である．

通常，最終値の定理は，極限が存在する場合に限定されている．

$y(t)$ を $[0,\infty)$ の信号とし，$Y(s)$ をその片側ラプラス変換とする．$y(t)$ の極限が存在するときには，これを次式のように定義する．

$$
y(\infty) := \lim_{t\to\infty} y(t) \tag{55}
$$

ここで，存在するとは，$y(\infty)$ は実数であり (∞,$-\infty$ は実数ではない)，$t\to\infty$ のとき，$y(t)-y(\infty)\to 0$ であることを意味している．また，$Y(s)$ はプロパーな有理関数と仮定する．このとき，通常の最終値定理は以下のようになる．

定理 2 (Standard Final Value Theorem) $Y(s)$ の各極は，左半平面か原点にあり，原点極がある場合は単極であると仮定する．このとき，$y(\infty)$ が存在し，次式で与えられる．

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) \tag{56}$$

たとえば，次の例がある．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s+2}{s(s+1)} \\ y(t) &= 2 + e^{-t} \\ y(\infty) &= 2 \end{aligned}$$

また，仮定が満たされない次の例を見てみよう．

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin \omega t \\ Y(s) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

極が左半平面か原点にあるという仮定を満たさず，実際には極限 $y(\infty)$ は存在しない．しかしながら，$\lim_{s \to 0} sY(s) = 0$ となることから最終値の定理は成り立たない．この例の場合には，$\lim_{s \to 0} sY(s) = 0$ が $y(t)$ の平均値に収束することを後述する．

ここでは，つぎの 3 つの場合への最終値の定理の拡張を紹介する．

- 極限が無限大の場合 [2]
- 非有理関数の場合 [2]
- 準周期関数の場合 [3]

11.1 極限が無限大の場合

ここでは，極限 $y(\infty)$ は存在せず，かつ，$\lim_{t \to \infty} y(t) = \infty$，あるいは $\lim_{t \to \infty} y(t) = -\infty$ である場合に，最終値の定理を拡張する．ここでは，$y(\infty)$ で，$\pm\infty$ を表すものとし，このような状況を $y(\infty)$ は存在しないが，無限大であると呼ぶことにする．

この定義では，$y(t) = e^t \sin t$ のような信号には適用できないので注意が必要である．その代わりに，$y(t) = e^t$ の場合を考える．このとき，$y(\infty) = \infty$ である．$Y(s) = \frac{1}{s-1}$ であるので，$\lim_{s \to 0} sY(s) = 0$ となり，(56) は成立しない．しなしながら，つぎの結果は，原点での多重極に起因する無限大極限にまで拡張されている．以降，$s \downarrow 0$ は，s を正数から 0 に近づけることを意味しているものとする．

$s \downarrow 0$ 極限の結果は，$Y(s)$ が閉左半平面のみに極をもち，開右半平面で解析的である事実に矛盾しないことに注意する．したがって，ラプラス変換は開右半平面で収束し，極限は正の実軸に沿ってとることができるが，閉左半平面からとると極限は存在しない．

つぎの定理が成立する．

定理 3 (Extended Final Value Theorem) $Y(s)$ の各極は開左半平面にあるか原点にあると仮定する．ことき，$y(\infty)$ が存在し，次式で与えられる．

$$y(\infty) = \lim_{s \downarrow 0} sY(s) \tag{57}$$

特に，$s = 0$ が $Y(s)$ の多重極であるならば，$y(\infty)$ は存在せず，無限大になる．

(証明)
次式のようにおく．

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_{AS}(s)$$

ただし，$Y_0(s)$ は非ゼロで原点にすべての極をもち，$Y_{AS}(s)$ は開左半平面にすべての極があるとする．$\lim_{s\to 0} sY_{AS}(s) = 0$ であることに注意する．つぎに，

$$Y_0(s) = \frac{a_n}{s^n} + \cdots + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s}$$

ただし，n は正の整数で，a_n は非ゼロとする．$n = 1$ のとき，$\lim_{s\to 0} sY_0(s) = a_1$ であり，有限の極限を持つことになる．
$n \geq 2$ のとき，

$$\lim_{s\downarrow 0} sY(s) = \mathrm{sgn}(a_n)\infty$$

となる．逆ラプラス変換すると，次式のようになる．

$$y(t) = y_0(t) + y_{AS}(t)$$

ただし，$y_0(t) = \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + a_2 t + a_1$ であり，$y_{AS}(t)$ は $\lim_{t\to\infty} y_{AS}(t) = 0$ を満足する $Y_{AS}(s)$ の逆ラプラス変換とする．$\lim_{t\to\infty} y_0(t) = \mathrm{sgn}(a_n)\infty$ であるので，(57) が成り立つ．■

例題として，次式を考える．

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s - 4}{s^2(s+2)}$$

この逆ラプラス変換は，$y(t) = -2t + e^{-2t}$ であり，(57) より，$y(\infty) = -\infty$ である．

注意 1 *Extended Final Value Theorem* は，虚軸上の非ゼロ極を持つ場合には，適用することができない．なぜなら，極限が存在しないからである．また，開右半平面に局がある場合にも適用することができない．

11.2 非有理関数の場合

Standard Final Value Theorem は，$Y(s)$ が開左半平面にのみ極を持ち，原点に単極をもってもよいときに適用することができる．この場合，$Y(s)$ は次式のように書ける．

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s}$$

ただし，$X(s)$ は開左半平面に孤立特異点のみをもつとする．時間領域の対応する関数は次式を満足する．

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

関数 $x(t)$ は開左半平面において $X(s)e^{-st}$ の留数を計算する標準的な方法により得ることができる．これは，$t > 0$ に対して，指数関数により支配され，$x(\cdot)$ は絶対積分可能である．したがって，

$$y(\infty) = \int_0^\infty x(\tau)d\tau = X(0) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

したがって，Standard Final Value Theorem は有理関数のみに限定する必要はないことがわかる．

例として，次の関数を考える．

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{erf}(2\sqrt{t})$$

ただし，erf は次式で定義される誤差関数である．

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\tau^2}d\tau$$

$\mathrm{erf}(\infty)=1$ であるので，$y(\infty)=\frac{1}{2}$ となる．変数変換により，次式のように書きなおすことができる．

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-4\tau}}{\sqrt{\tau}}d\tau$$

したがって，被積分関数は，e^{-4t} に支配されることがわかる．$y(t)$ のラプラス変換は次式で与えられる．

$$Y(s)=\frac{1}{s\sqrt{s+4}}$$

Standard Final Value Theorem を適用すると，次式のように最終値が得られる．

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\sqrt{s+4}}=\frac{1}{2}$$

無限大の最終値を含めるために，Extended Final Value Theorem を非有理のラプラス変換に拡張したものが以下である．

定理 4 (Generalized Final Value Theorem) $y(t)$ はラプラス変換可能であるとする．$\lambda>-1$ とし，$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t^\lambda}$ と $\lim_{s\downarrow 0} s^{\lambda+1}Y(s)$ が存在すると仮定する．このとき，次式が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t^\lambda}=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\lim_{s\downarrow 0} s^{\lambda+1}Y(s) \tag{58}$$

ここで，$\Gamma(x)$ は次式で定義されるガンマ関数である．

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,\quad x>0$$

n が正の整数の場合には，$\Gamma(n+1)=n!$,$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$,$\Gamma(n+(1/2))=[1\cdot 3\cdots(2n-1)]\sqrt{\pi}/2^n$ である．

$\lambda=0$ のとき，Generalized Final Value Theorem は，Standard Final Value Theorem に帰着される．さらに，(58) の右辺の極限が存在するときには，$y(t)$ は次式のオーダーで無限大に漸近する．

$$y(t)\sim\left(\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\lim_{s\downarrow 0} s^{\lambda+1}Y(s)\right)t^\lambda$$

$\Gamma(x)$ は正であるので，$y(t)$ が，∞ に近づくか，$-\infty$ に近づくかは，$\lim_{s\downarrow 0} s^{\lambda+1}Y(s)$ により決定される．

$Y(s)$ は有理関数でなくてもいいので，Generalized Final Value Theorem は Extended Final Value Theorem を一般化したものになっている．次の例を考える．

$$y(t)=\sqrt{t}$$

このとき，次式が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{\sqrt{t}}=1$$

これは，つぎのようにラプラス変換される．

$$Y(s)=\frac{1}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Generalized Final Value Theorem から，次式が得られる．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\lim_{s\downarrow 0} s^{3/2}Y(s)=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

11.3 準周期関数の場合

周期関数あるいは準周期関数の場合には，極限を平均値に置き換えることにより，最終値の定理が成立することを示す．

11.3.1 平均の概念

関数 $f(t)$ が区間 $(0,\infty)$ で定義されているとき，平均値 (average) は次式で定義される．

$$< f >= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\lambda)d\lambda \tag{59}$$

この $f(t)$ が周期 T をもつとき，$0 < t - NT < T$ なる整数 N を考える．明らかに，$N \to \infty$ のとき，$t \to \infty$ になる．$\Delta(t) = t - NT$ とおくと，$t = NT + \Delta(t)$ であり，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
< f > &= \lim_{t\to\infty\ (N\to\infty)} \frac{\int_0^{NT} f(\lambda)d\lambda + \int_{NT}^{NT+\Delta(t)} f(\lambda)d\lambda}{NT+\Delta(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty\ (N\to\infty)} \frac{N\int_0^{T} f(\lambda)d\lambda + \int_{0}^{\Delta(t)} f(\lambda)d\lambda}{NT+\Delta(t)} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{T+a} f(t)dt, \quad \forall a \geq 0
\end{aligned}$$

したがって，無限区間の平均は，周期関数の場合には，1 周期平均に置き換えることができる．もし，$< f > \neq 0$ であるならば，$\int_0^\infty f(t)dt$ は発散する．

11.3.2 $< f >$ の性質

$< f >$ は，つぎの性質をもつ．

- $< f >$ が $(0,\infty)$ 上で存在するならば，それは時間軸のスケールに独立である．
- 定数 a, b に対して，線形性 $< af_1 + bf_2 >= a < f_1 > + b < f_2 >$ が成り立つ．
- 連続で $(0,\infty)$ で有界な関数 f において，$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$ が存在するならば，次式が成り立つ (ロピタル定理からいえる)．

$$< f >= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(\lambda)d\lambda = f(\infty)$$

11.3.3 最終平均値の定理

周期 T の周期関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は以下のようになる．

$$F(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

ここで，

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{1 - e^{-sT}} = \frac{1}{T}$$

に注意すると，以下のように，最終値の定理の拡張 (ここでは，最終平均値の定理 (Final Average Theorem) とよぶことにする) が可能である．

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} sF(s) &= \lim_{s\to 0} s\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt =< f > \qquad (60)
\end{aligned}$$

$f(t)$ が準周期関数であるとは，$t \to \infty$ で，$f(t)$ が周期関数に収束するような関数のことを意味する．この準周期関数に対して，以下の最終値の定理の拡張が可能である．

定理 5 f を $[0,\infty)$ で連続絶対積分可能な実数値関数とし，周期関数 f_{as} に漸近的に等しい，つまり，次式が成り立つとする．

$$|f(t)-f_{as}(t)|<\phi(t)$$

ただし，ϕ は $[0,\infty)$ で絶対積分可能で．$\lim_{t\to\infty}\phi(t)=0$ とする．このとき，次式が成立する．

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\lambda)d\lambda=<f> \tag{61}$$

(証明)
まず，$f(t)$ は有限周期をもつ関数 $f_{as}(t)$ に漸近すると仮定する．前述の議論から，周期関数 $f_{as}(t)$ に対しては，次式が成立する．

$$<f_{as}>=\lim_{s\to 0} sF_{as}(s)$$

条件

$$|f(t)-f_{as}(t)|<\phi(t)$$

より，次式が成立する．

$$\begin{aligned}\left|\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (f(\lambda)-f_{as}(\lambda))d\lambda\right| &\le \frac{1}{t}\int_0^t \phi(\lambda)d\lambda\\ &\le \frac{1}{t}\int_0^\infty \phi(\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

，ϕ は $[0,\infty)$ で絶対積分可能であるので，上式の右辺は，$t\to\infty$ のとき，ゼロに収束する．このとき，左辺は以下のことを意味する．

$$<f>=<f_{as}>$$

さらに，$\phi(t)$ は，$s\ge 0$ に対して，有限値のラプラス変換を持つので，次式を容易に示すことができる．

$$\lim_{s\to 0}|s(F(s)-F_{as}(s)|\le\lim_{s\to 0}s\Phi(s)=0$$

したがって，次式が示された．

$$\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}sF_{as}(s)=<f>$$

■

11.3.4 線形時不変系への最終平均値の定理の応用

つぎの単一入力単一出力線形時不変系 (SISO LTI system, single-input and single-output linear time invariant system) を考える．

$$Y(s)=H(s)U(s) \tag{62}$$

ただし，$H(s)$ は安定な伝達関数で，そのインパルス応答を $h(t)$(つまり，$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$) とする．
このとき，以下の定理が成り立つ．

定理 6 $\lim_{s\to 0}H(s)=H(0)$ が存在するならば，ゼロ状態応答 *(初期条件がゼロのときの出力応答)*f_{out} の時間平均はm次式で与えられる．

$$<f_{out}>=H(0)<f_{inp}>$$

(証明)

$$\begin{aligned}<f_{out}> &= \lim_{s\to 0}sF_{out}(s)=\lim_{s\to 0}sH(s)F_{inp}(s)\\ &= H(0)\lim_{s\to 0}sF_{inp}(s)=H(0)<f_{inp}>\end{aligned}$$

参考文献

[1] K.H. Lundberg, H.R. Miller, and D.L. Trumper : Initial Conditions, Generalized Functions, and the Laplace Transform – Trouble at the Origin –, IEEE Control Systems Magazine, 27-1, 22-35, 2007.

[2] J. Chen, K.H. Lundberg, D.E. Davision, and D.S. Bernstein, The Final Value Theorem Revised, – Infinite Limits and Irrational Functions –, IEEE Control Systems Magazine, June, 97-99 (2007).

[3] E. Gluskin, Let us teach this generalization of the final-value theorem, Eur. J. Phys., 24, 591-597 (2003).

[4] `www4.ncsu.edu/~schecter/ma_341_fa06/varpar.pdf`

[5] 島村敏：基礎ラプラス変換, コロナ社 (1965).

[6] A. パポリス：工学のための応用フーリエ積分，オーム社 (1967).

[7] 篠崎，松森，松浦：現代工学のためのデルタ関数入門, 現代工学社 (1983).

付録

これまでに述べたことを, 便利のため，公式としてまとめておく [7]．本章部分の説明を難しいと思ったら，まず，こちらの公式でおおまかな流れをつかんで，具体的計算ができるようになってから，本章部分を読んでください.

A　デルタ関数公式

事実 1 $h(t)$ が連続であるとき，$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)h(\tau)d\tau$

(導出) $h(t-l)$ が $l=[-\epsilon,\epsilon]$ で連続であるとき，次式が成り立つ.

$$\min_{-\epsilon\le l\le\epsilon}h(t-l)=\min_{-\epsilon\le l\le\epsilon}h(t-l)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(\tau)d\tau\le\int_{-\epsilon}^{\epsilon}h(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\le\max_{-\epsilon\le l\le\epsilon}h(t-l)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(\tau)d\tau=\max_{-\epsilon\le l\le\epsilon}h(t-l)$$

$\epsilon\to 0$ とすると，題意のことが言える．■

事実 2 $\delta(t)=\delta(-t)$

(導出) これは，$\phi(t)$ はテスト関数で連続であるので，次式よりわかる.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-t)\phi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(\tau)\phi(-\tau)(-d\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\phi(-\tau)d\tau=\phi(-0)=\phi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt$$

■

事実 3 $h(t)\delta(t)=h(0)\delta(t)$

(導出)

$$\int_{-\infty}^{\infty}(h(t)\delta(t))\phi(t)dt=\int_{\infty}^{-\infty}\delta(t)(h(t)\phi(t))dt=h(0)\phi(0)=h(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}(h(0)\delta(t))\phi(t)dt$$

■

事実 4 $t\delta(t)=0$

(導出) 略.

■

事実 5 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\phi(t)dt=(-1)^n\phi^{(n)}(0)$

(導出) テスト関数では，$\phi(\pm\infty)=0$ であるので，次式のようになる.

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\phi(t)dt=[f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi'(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\phi'(t)dt$$

高階の場合には，以下を順次適用すればよい.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)\phi(t)dt=[\delta^{(n-1)}(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n-1)}(t)\phi'(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n-1)}(t)\phi'(t)dt$$

■

事実 6 $h(t)\delta'(t)=h(0)\delta'(t)-h'(0)\delta(t)$

(導出) テスト関数では，$\phi(\pm\infty)=0$ であるので，次式のようになる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\delta'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)(h(t)\phi(t))dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(h(t)\phi(t))'dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(h'(t)\phi(t) + h(t)\phi'(t))dt$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(h'(t)\phi(t))dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(h(t)\phi'(t))dt = -h'(0)\phi(0) - h(0)\phi'(0)$$
$$= -h'(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt - h(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} h'(0)\delta(t)\phi(t)dt + h(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)dt$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} h'(0)\delta(t)\phi(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} h(0)\delta'(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-h'(0)\delta(t) + h(0)\delta'(t))\phi(t)dt$$

■

事実 7 $h(t)\delta(t-\tau) = h(\tau)\delta(t-\tau)$

(導出)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (h(t)\delta(t-\tau))\phi(t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(t-\tau)(h(t)\phi(t))dt = h(\tau)\phi(\tau) = h(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)\phi(t)dt$$

■

事実 8 $t\delta'(t) = -\delta(t), \quad t^2\delta'(t) = 0$

(導出)

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta'(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)(t\phi(t))dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(t\phi(t))'dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)(\phi(t) + t\phi'(t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt$$
$$t^2\delta'(t) = -t\delta(t) = 0$$

■

事実 9 $th_1(t) = th_2(t) \Rightarrow h_1(t) = h_2(t) + c\delta(t), \quad (c:\text{定数})$

(導出)

$$t(h_2(t) + c\delta(t)) = th_2(t) + ct\delta(t) = th_2(t)$$

■

B　ラプラス変換公式

事実 10 $\mathcal{L}_-\{\delta(t)\} = 1$

(導出) 省略

■

事実 11 $\mathcal{L}_-\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

(導出)

$$\mathcal{L}_-\{\delta(t-a)\} = \int_{0-}^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}$$

■

事実 12 $\mathcal{L}_-\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出)

$$\mathcal{L}_-\{u(t)\} = \int_{0-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0+}^{\infty} e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{0+}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

また，部分積分とデルタ関数を用いて，つぎのように導出することもできる．

$$\mathcal{L}_-\{u(t)\} = \int_{0-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}u(t)\right]_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\delta(t)dt = 0 + \frac{1}{s}u(0-) + \int_{0-}^{\infty}\left(\frac{1}{s}e^{-st}\right)\delta(t)dt = \frac{1}{s}$$

■

事実 13 $\mathcal{L}_-\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}_-\{f(t)u(t)\}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出)

$$\mathcal{L}_-\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0-}^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau = e^{-as}\int_{0-}^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

■

事実 14 $\mathcal{L}_-\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出)

$$\mathcal{L}_-\{tu(t)\} = \int_{0-}^{\infty} tu(t)e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}tu(t)\right]_{0-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0-}^{\infty}\left(-u(t)e^{-st}\right)dt = \frac{1}{s}\int_{0+}^{\infty}\left(-e^{-st}\right)dt = \frac{1}{s^2}$$

ただし，以下の式を用いている．

$$(tu(t))' = u(t) + tu'(t) = u(t) + t\delta(t) = u(t)$$

■

事実 15 $\mathcal{L}_-\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出)

$$\mathcal{L}_-\{u(t)\} = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0+}^{\infty} u(t)e^{-(s+a)t}dt = \left[-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right]_{0+}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

■

事実 16 $\mathcal{L}_-\{(\sin\omega t)u(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出) 次式が成立することを利用する．

$$\mathcal{L}_-\{e^{j\omega t}u(t)\} = \frac{1}{s-j\omega}, \quad \mathcal{L}_-\{e^{-j\omega t}u(t)\} = \frac{1}{s+j\omega}$$

これより，次式のようになる．

$$\mathcal{L}_-\{(\sin\omega t)u(t)\} = \frac{1}{2j}\int_{0-}^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\int_{0+}^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

■

事実 17 $\mathcal{L}_-\{(\cos\omega t)u(t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出)

$$\mathcal{L}_-\{(\cos\omega t)u(t)\} = \frac{1}{2}\int_{0-}^{\infty}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_{0+}^{\infty}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

■

事実 18 $\mathcal{L}_-\{e^{-at}\sin\omega t u(t)\} = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出) 省略

■

事実 19 $\mathcal{L}_-\{e^{-at}(\cos\omega t)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ ただし，$u(t)$ は単位ステップ関数である．

(導出) 省略

■

事実 20 $\mathcal{L}_-\{f'(t)\} = -f(0-) + s\mathcal{L}_-\{f(t)\}$

(導出)

時間微分則 (4) は，$f'(t)$ に定義 (3) に適用した式

$$\mathcal{L}_-\{f'(t)\} = \int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

から直接得ることができる．部分積分すると，次式が得られる．

$$\int_{0-}^{\infty} f'(t)g(t)dt = f(\infty)g(\infty) - f(0-)g(0) - \int_{0-}^{\infty} f(t)g'(t)dt$$

ここで，$g(t) = e^{-st}, g'(t) = -se^{-st}$ を用いると，次式が得られる．

$$\int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = -f(0-)e^0 + \int_{0-}^{\infty} f(t)se^{-st}dt = -f(0-) + s\mathcal{L}_-\{f(t)\}$$

■

事実 21 $\mathcal{L}_-\{\int_{0-}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\} = \mathcal{L}_-\{f(t)\}\mathcal{L}_-\{g(t)\}$

(導出)

■

事実 22 ヘビサイドの展開定理

(導出)

■