

PID+Q コントローラによる制御系性能向上設計法

第2部:PID+Q コントローラの構造とその設計法*

松尾 孝美

2002年10月15日

目次

1 はじめに	3
2 フィードバック制御系の性能評価のための手法	4
2.1 ブロック線図	4
2.2 閉ループ伝達関数	5
2.3 安定性の評価	5
2.4 過渡応答を評価するために	5
2.5 ステップ応答波形による評価	6
2.6 偏差の時間積分値による評価	7
2.7 極配置による評価	7
2.8 定常応答を評価するために	7
2.9 周波数応答	7
2.10 ボード線図	8
2.11 フィードバック制御系の構造と目的—外乱の存在する場合	9
2.12 フィードバック制御系の構造と目的—モデリング誤差の存在する場合	10
3 アナログPID制御とデジタルPID制御	10
3.1 アナログPID制御とその調整法	11
3.1.1 アナログPID コントローラとは?	11
3.1.2 アナログPID コントローラによる定常特性改善のための指針	13
3.1.3 アナログPID コントローラの直感的パラメータ調整法	13
3.1.4 アナログPID コントローラのパラメータチューニング法	14
3.2 デジタルPID コントローラの実現方法	15
3.2.1 デジタル信号の取扱い	15
3.2.2 P動作のデジタル化	15
3.2.3 I動作のデジタル化	16
3.2.4 D動作のデジタル化	16
3.2.5 PID制御器のデジタル化	16
3.3 種々のデジタルコントローラ再設計法	17

*大分大学研究シーズ発表会資料 ver.1

3.3.1	アナログコントローラのデジタル化	17
3.3.2	インパルス不変変換	18
3.3.3	後退差分変換	18
3.3.4	双1次変換	18
4	PID制御の発展形	19
4.1	微分先行型PID制御—PI-D制御	19
4.2	比例・微分先行型PID—I-PD制御	21
4.2.1	北森の方法	22
4.3	フィードフォワード併用PID制御	22
4.3.1	条件付きフィードバック制御	23
4.3.2	内部モデル制御(IMC)	24
4.4	スミス補償型PID制御	24
4.5	非干渉PID制御	25
4.6	2自由度PID制御	25
4.7	可変パラメータPID制御	25
4.8	PID+Qコントローラ	26
4.9	最近の動向	26
4.9.1	非線形最適化計算による多目的PIDコントローラ的设计例	26
4.9.2	製品としてのPIDコントローラ	29
5	静的出力フィードバックをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーション	30
6	PID+Qコントローラ	36
6.1	PIDコントローラ	36
6.2	PID+Qコントローラの特性	36
6.3	PID+Qコントローラの構造	36
6.4	ノミナル性能	39
6.5	ロバスト安定性	39
6.6	ロバスト性能	42
7	PD+Qコントローラによるクレーンリフタの制振制御	44
7.1	PID+Qコントローラの適用概要	44
7.2	リフターモデル	45
7.3	ビデオトラッカーの特性	45
7.4	一般化プラントの設定とコントローラ設計	45
7.5	シミュレーション結果	47
7.6	実験結果	50
8	PD+Qコントローラによるロボットマニピュレータのロバスト位置制御	54
8.1	モデルの記述	54
8.2	PDコントローラ	55
8.3	シミュレーション結果	55
9	あとがき	61

1 はじめに

線形フィードバック制御系を安定化するすべての線形安定化補償器はYoula Parametrizationにより与えられることが知られている [1]。Youla Parametrization は既約分解表現を用いて、1つの安定化補償器と自由パラメータによりすべての安定化補償器が表現されている。さらに、この安定化補償器を状態空間表現すると、オブザーバと自由パラメータからなるフィルタ付の推定誤差フィードバックの形に表されることが指摘されている [2],[3],[4],[5]。しかしながら、この状態空間表現は既約分解で得られた結果を用いており、状態空間法の中だけでself-containedの形にはなっていない。これに対して美多らは、既約分解を用いずに、LFT(Linear Fractional Transformation)の逆変換からオブザーバと自由パラメータからなるフィルタ付の推定誤差フィードバックからなる補償器がすべての安定化補償器を表現していることを示している [6]。また、Youla Parametrization から指定された1つの安定化補償器を得る自由パラメータはMooreらにより導出されている [7],[8]。逆に、一般の動的補償器から1つのシステムを安定化する補償器がどうしてオブザーバと自由パラメータからなるフィルタ付の推定誤差フィードバックからなるのかを状態空間表現から導出したのがMatsuoらである [9]。次いで、これに基づき、静的出力フィードバックをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーションを求めた。これは、制御対象が静的出力フィードバックにより安定化できる場合には、安定化補償器の構造がオブザーバによる推定構造から制御対象の内部モデルに基づく構造に単純化されることを意味している。さらに、このパラメトリゼーションからPIDコントローラをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーションを導いた [10]。この安定化補償器は、PIDコントローラと自由パラメータ、制御対象の内部モデルからなり、自由パラメータをゼロとした場合にはPIDコントローラに一致し、自由パラメータはPIDコントローラの性能改善のための補正項とみなされるものである。Matsuoらはこの安定化補償器をPID+Qコントローラと呼んでいる [11]。

PIDコントローラは古くから各種機器に幅広く用いられてきたもっともポピュラーなコントローラである。PIDコントローラは目標値と出力との偏差の比例・積分・微分信号の和をフィードバックする方式であり、安定化やオフセットの除去、応答速度の改善、感度低減など目的としている。PIDコントローラ的设计パラメータは比例・積分・微分の3つのゲインであり、ジューゲラ・ニコルスの調整法など古典制御をベースにした設計法がある [17],[21]。近年、現代制御理論から発達したロバスト制御の立場からPIDコントローラを設計する試みがなされている [31],[22]。これらの試みは、PIDコントローラの構造が簡単なことから、コントローラの構造をこの形に限定し、かつ、ロバスト性を満たすようなものを現代制御理論の範疇から求めようとするものである。これに対して、PIDコントローラに補助的なコントローラを付加して性能を上げようとする方法が、2自由度PID制御である [17]。PID+Qコントローラは2自由度PID制御と内部モデル制御とをからめた構造をもっている [11]。

Matsuoら [11] は、PID+Qの中の自由パラメータを H_∞ 制御手法を用いることにより、制御系のロバスト安定性を改善するのに用いることを提案し、PID+Qコントローラがつぎの特性を持っていることを示した。

- PID+Qコントローラのノミナル性能はPIDコントローラのそれと一致し、自由パラメータには依存しない。このため、3つのPIDパラメータはロバスト安定性やロバスト性能を上げるためのみに用いることができる。
- PID+Qコントローラは1型の閉ループ応答を保証するすべての安定化補償器を表現している。
- ロバスト安定性を向上するような自由パラメータは、ある種の H_∞ モデルマッチング問題を解くことに帰着され、これはLMI (Linear Matrix Inequality)[40]を用いて解くことができる。

さらに我々は、このPID+Qコントローラをメカニカルシステムへ応用することを試みている。

1つは、ロボットマニピュレータのロバスト制御への応用である [12]。ロボットマニピュレータでは、各リンクごとにハイゲインのPD制御が用いられることがあるが、リンク間の干渉項や重力項、寄生要素のような不確かさにより、不安定性を招くことがある。そこで、これらに対する安定性と性能を向上させるためにPID+Qコントローラを用いる事を試み、その有効性をシミュレーションにより確認した結果、D項に近似微分器を用いた場合の不安定性を回避するようなロバスト制御系の設計が可能であることが確認された。

もう1つは、ビデオトラッカーを用いたクレーン振れ止め制御への応用である。ビデオトラッカーとは応用計測研究所の開発した光学計測装置の1つである [13]。2つのマーカの動きを白黒のカメラの映像データを閾値の任意設定により2値化処理し、対象物の位置座標および面積を検出しながら自動的に追跡し、60[Hz]のデジタル信号としてパソコンにRS232Cを介して出力するものである。ビデオトラッカーは物体や人間などの位置や運動を計測するのに適しており、次のような色々な応用が考えられている。

- 自動車や建設機械の運動計測
- ロボットや機械の動作研究，制御
- 歩行やスポーツ動作解析，人間工学研究
- 人間や動物の行動計測
- 橋や建築物などの変位計測など

リフターは小型のクレーンに人を搬送するためのロープと吊り具をとりつけた装置である。リフターは福祉機器や工業プラントに多く用いられており、搬送物の振れ止め制御が1つの課題となっている [32]。振れ止め制御を実現するためには、ロープの揺れを精度よく検出する必要がある。ロープは取り付け部から揺れるので、エンコーダなどで検出することは難しいため、ビデオトラッカーによる光学計測を用いる。大山らは、ビデオトラッカーを用いた倒立振子の安定化制御をLQG制御とむだ時間補償器により達成している [44]。この論文で大山らは、ビデオトラッカーには画像処理とRS232Cによるデータ転送のために、 $\frac{1}{30}$ 秒程度の時間遅れが存在し、これを補償しなければ制御が難しいと指摘している。そこで我々はPID+Qコントローラ [11] を用いて、リフターのビジュアルフィードバック制御を行い、実験によりその有効性を検証した。

本資料では、PIDコントローラの従来の設計法と我々のこれまでの研究のまとめを行い、PID+Qコントローラ設計法について概説し、さらに、リフターの制振制御およびロボットマニピュレータの位置制御への応用についてまとめる。なお、ここでは次の記法を用いる：

$$F_l(G, Q) \quad : \text{lower LFT}$$

$$C(sI - A)^{-1}B + D \quad := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

2 フィードバック制御系の性能評価のための手法

通常、古典制御系設計の際には伝達関数を用いる。この理由は、微分方程式のままだと微積分の取り扱いが面倒になるが、伝達関数ではこれがなくなり、単純に s に関する代数計算で事足りるからである。

2.1 ブロック線図

伝達関数を使ってシステムを記述し、その構造を図示したものがブロック線図と呼ばれる。これは前に述べたシステムのネットワークを伝達関数とラプラス変換した信号で表したものに等しい。ブロック線図には次の3つの基本構成要素がある。

1. 伝達ブロック
2. 加えあわせ点
3. 引き出し点

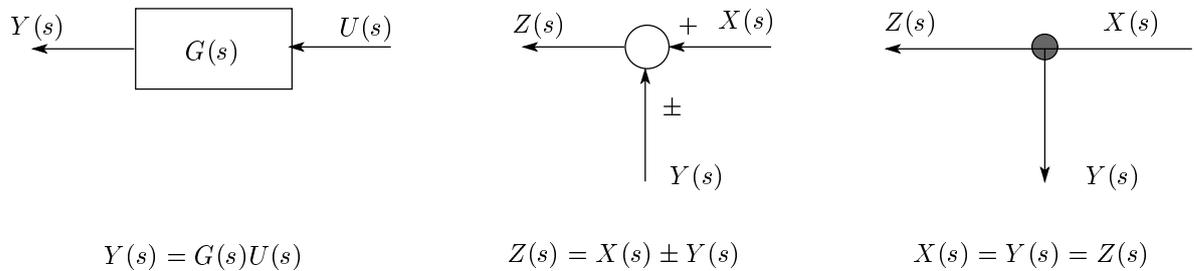


図 1: 伝達ブロック

2.2 閉ループ伝達関数

次図のような単一フィードバック系を考えよう．ここで， $Y(s)$:出力， $R(s)$:目標値， $U(s)$:制御入力， $D(s)$:

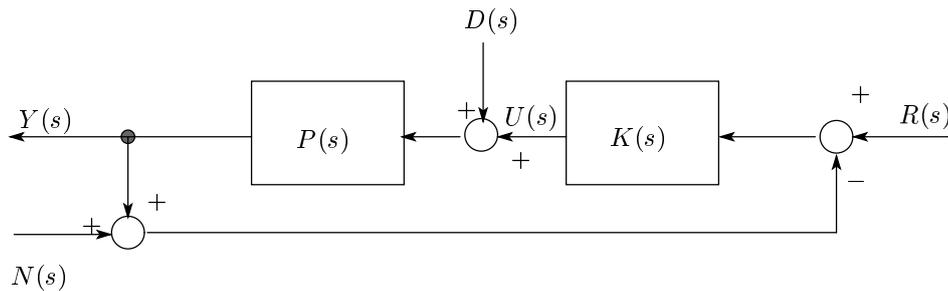


図 2: unity feedback system

外乱， $N(s)$:雑音で，すべて時間関数をラプラス変換したものを表しているとする．また， $P(s)$ は制御対象をモデル化した伝達関数， $K(s)$ はコントローラ（前置補償器とも呼ばれる）の伝達関数である．制御系の目的は，出力 $Y(s)$ が目標値 $R(s)$ に追従するようなコントローラを設計することであり，設計されたコントローラの性能は目標値から出力までの伝達関数（閉ループ伝達関数という）によって決定される．

2.3 安定性の評価

閉ループ系が暴走せずに安定しているためには，閉ループ伝達関数のすべての極の実部が負でなければならない．したがって，これらの極が複素平面上の左半面にあることをチェックしなければならない．

2.4 過渡応答を評価するために

閉ループ伝達関数 $G(s)$ の過渡応答を評価するための手段をいくつか紹介しよう．

2.5 ステップ応答波形による評価

制御対象の伝達関数 $G(s)$ の PID 制御系に、目標値として単位ステップ信号を加えたときの、ステップ応答を Simulink を用いて出力してみよう。制御対象の伝達関数とコントローラをつぎのようにおく。

$$G(s) = \frac{1}{0.1s + 1} e^{-0.1s}, K(s) = 2$$

Simulink 図 `pid\pid_stepres.mdl` はつぎのようになる。このときの応答データは、Simulink の Scope のブ

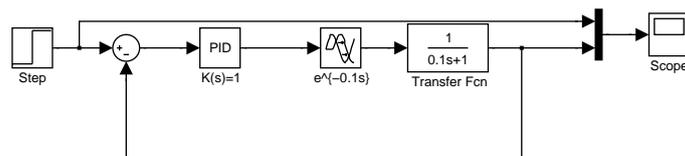


図 3: Simulink 図

ロパティのデータヒストリでワークスペース上に名前 `outsignal` で保存するように指定していると、つぎの M ファイルを実行することにより、応答波形をグラフ化できる。

```
plot(outsignal.time,outsignal.signals.values(:,1),'r--', ...
     outsignal.time,outsignal.signals.values(:,2),'b-')
xlabel('time'),ylabel('output')
```

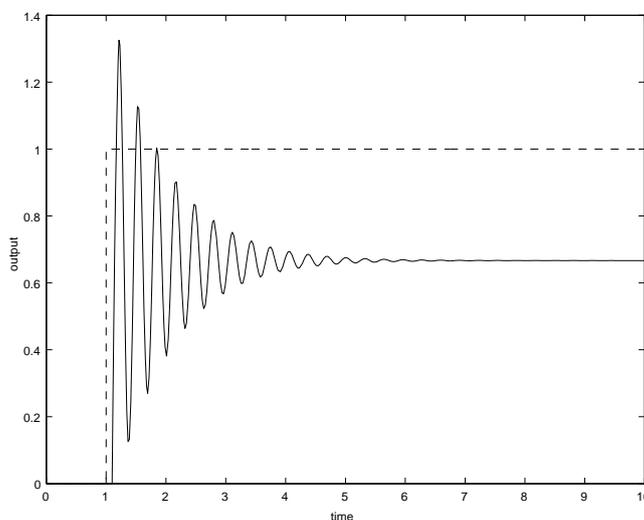


図 4: ステップ応答

ステップ応答で着目する各量は次のとおりである。

1. 偏差：各時刻における目標値と出力との差
2. 定常偏差：応答の最終的に落ち着く先と目標値との差
3. オーバーシュート：出力が定常値を越えたものの最大値
4. アンダーシュート：出力が定常値と逆方向、定常値が正の値の場合には負の方向へ逆応答したときの最大値

5. ピーク時間：オーバーシュートに達するまでの時間 T_P
6. 立ち上がり時間：定常値の10% から90% まで変化する時間 T_r
7. 5% 整定時間：出力が定常値を中心として5% の範囲内に収まるまでの時間 T_s

2.6 偏差の時間積分値による評価

各時刻における偏差 $e(t)$ の大きさを時間積分してその値の小ささにより性能評価をする方法がある。大きさのとりかたには次のようなものがある。

1. IAE (integral of absolute value of error)：偏差の絶対値の積分

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (1)$$

2. ISE (integral of squared error)：偏差の2乗の積分

$$\int_0^{\infty} \{e(t)\}^2 dt \quad (2)$$

3. ITAE (integral of time multiplied by absolute error)：偏差の絶対値の積分

$$\int_0^{\infty} t|e(t)| dt \quad (3)$$

2.7 極配置による評価

閉ループ系の極の配置を図に描き、指定された領域に入っているかどうかで判断する。極の実部は応答減衰の速さに関係し、虚部は振動の振幅に関係しているが、極相互の位置にも依存しており具体的な評価とは言い難い。

2.8 定常応答を評価するために

周波数伝達関数とは入力としていろいろな周波数の正弦波・余弦波を加えたときの出力の定常応答との入出力関係を表している。詳しく言うと、入力である正弦波・余弦波の振幅と位相が定常出力ではどのように変化するかを複素数で表すものである。周波数応答は制御系の定常特性の評価のためによく用いられる。ボード線図はこれを図示したものである。

2.9 周波数応答

閉ループ伝達関数 $G(s)$ のシステムに目標値として次のような正弦波を入力する。

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (4)$$

時間が十分経過したときの定常出力 $y_s(t)$ は同じ周波数の正弦波となり、次のようになる。

$$y_s(t) = |G(j\omega)| V_m \sin(\omega t + \phi + \angle G(j\omega)) \quad (5)$$

ここで、 j は純虚数 $\sqrt{-1}$ である。 $G(j\omega)$ は ω に依存する複素数であり、下図のように、 $|G(j\omega)|$ はその大きさ、 $\angle G(j\omega)$ はその偏角を表している。制御工学では、 $|G(j\omega)|$ を伝達関数のゲインといい、 $\angle G(j\omega)$ をその位相という。上式は、定常応答の振幅が目標値入力を $|G(j\omega)|$ 倍したものになり、位相が目標値入力の位相から $\angle G(j\omega)$ 進むことを表している。

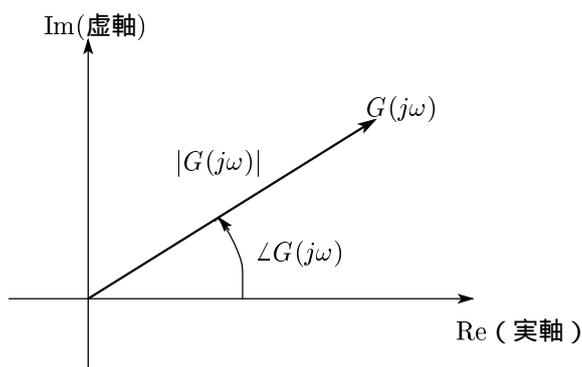


図 5: 極座標表現

2.10 ボード線図

ω を横軸 (対数軸) に, $|G(j\omega)|$ と $\angle G(j\omega)$ を縦軸に描いたものをボード線図という. つぎの Simulink で書かれる閉ループ伝達関数のボード線図を計算してみよう. Simulink 図の左下のボタンには, 閉ループ伝達

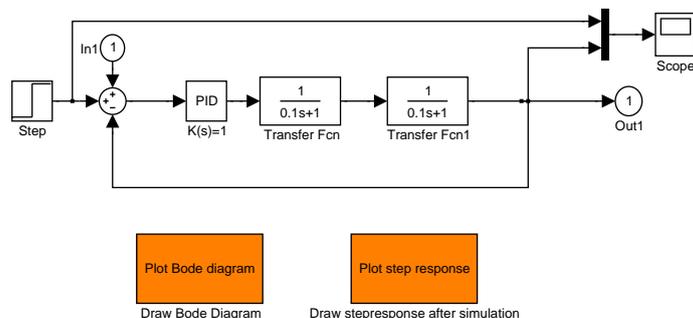


図 6: ステップ応答

関数を Simulink 図から算出し, ボード線図を表示する M ファイル `pid_bodedg.m` が割り当てられている.

```
[a,b,c,d] = linmod('pid_bode');
[num,den] = ss2tf(a,b,c,d);
printsys(num,den)
w = logspace(-1,5,100); %angular frequency
[mag,phase] = bode(num,den,w);
f=w'/(2*pi); % frequency
magdb = 20*log10(mag);
subplot(2,1,1),semilogx(f,magdb)
xlabel('Frequency[Hz]'),ylabel('Gain dB'),grid
subplot(2,1,2),semilogx(f,phase)
xlabel('Frequency[Hz]'),ylabel('Phase deg'),grid
```

ボード線図はつぎのようになる. Simulink 図の右下のボタンには, ステップ応答を表示する M ファイル `mkgraf_time.m` が割り当てられている. これは, Simulink のシミュレーションを実行した後に有効である.

```
clf,plot(outsignal.time,outsignal.signals.values(:,1),'r--', ...
        outsignal.time,outsignal.signals.values(:,2),'b-')
xlabel('time'),ylabel('output')
```

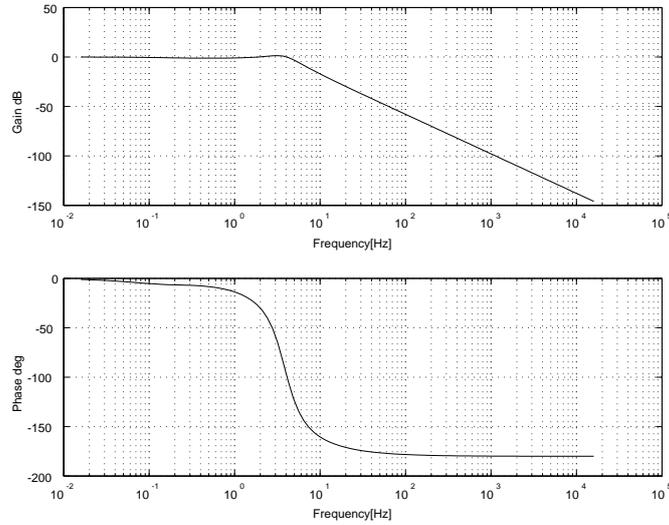


図 7: ボード線図

2.11 フィードバック制御系の構造と目的—外乱の存在する場合

図2のフィードバック制御系を対象とする． $Y(s)$:出力, $R(s)$:目標値, $U(s)$:制御入力, $V(s)$: フィードバック量, $D(s)$:外乱, $N(s)$:雑音で, すべて時間関数をラプラス変換したものを表しているとする．また, $P(s)$ はプラント伝達関数で, $C(s)$ は 前置補償器と呼ばれる．出力は次式ようになる．

$$Y(s) = T(s)R(s) + S(s)P(s)D(s) - (I - S(s))N(s) \quad (6)$$

ただし,

$$G(s) = P(s)K(s) \quad : \quad \text{開ループ伝達関数} \quad (7)$$

$$S(s) = (I + P(s)K(s))^{-1} \quad : \quad \text{感度関数} \quad (8)$$

$$T(s) = (I + P(s)K(s))^{-1}P(s)K(s) = P(s)K(s)(I + P(s)K(s))^{-1} \quad : \quad \text{閉ループ伝達関数} \quad (9)$$

(6) 式右辺第1項が目標値信号 $R(s)$ の出力 $Y(s)$ までの影響, 第2項が外乱信号 $D(s)$ の出力 $Y(s)$ までの影響, 第3項が雑音信号 $N(s)$ の出力 $Y(s)$ までの影響を表している．ただし, 次式が成り立つことに注意する．

$$S(s) + T(s) = I$$

このことから, $T(s)$ は, 相補感度関数とも呼ばれる．

ここで, 目標値と出力の差を偏差信号として次のように定義する．

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (10)$$

あるいは, 時間領域でかくと, 次式である．

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (11)$$

(6) 式より, $E(s)$ は次のように表される．

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)P(s)D(s) + T(s)N(s) \quad (12)$$

制御系は偏差信号を限りなく小さくすることが望まれるので、制御系設計の目的は次のように言うことができる。

フィードバック制御系構成の目的は、外乱、雑音さらにプラントのモデリング誤差に影響されず、偏差 e をゼロに近づけるような $K(s)$ を見つけることである。

ただし、同一の周波数域において、(12) 式右辺の全部の項を小さくする（各伝達関数 $T(s)$, $S(s)P(s)$, $S(s)$ のゲインを下げる）ことは難しい。なぜならば、これらの伝達関数にはある代数的関係が成立し、一方を小さくすると、もう一方が大きくなるといった性質があるからである。実際の制御系では、目標値や外乱は比較的low周波の信号から成り、雑音はhigh周波の信号からなることが多い。そこで、各周波数域において、各伝達関数のゲインを小さくすることにより、外乱抑制と制御性能の向上を同時に達成できることになる。

2.12 フィードバック制御系の構造と目的—モデリング誤差の存在する場合

伝達関数によるプラントの数式モデルは、非線形性による近似誤差や物理パラメータの測定誤差のために、実プラントとの間にモデリング誤差を生んでしまう。制御系においては、このようなモデリング誤差にどの程度有効であるかも重要な評価ポイントとなる。モデリング誤差に強い制御系をロバストな制御系というが、これには2つの項目がある。

- ロバスト安定性：
設計モデルにより設計されたコントローラがモデリング誤差のあるプラントに適用されても、フィードバック系の安定性を損なわないこと。
- ロバスト(制御)性能：
設計モデルにより設計されたコントローラがモデリング誤差のあるプラントに適用されても、設計仕様と大差のない性能を保持すること。

ロバスト安定性の初歩的な概念は古典制御における安定余裕である。安定余裕にはゲイン余裕と位相余裕がある。ゲイン余裕とは、設計モデルを用いたフィードバック制御系において設計モデルのゲインを増加させたときにフィードバック系が安定性を保つギリギリの値をいい、位相余裕は同様に位相を変化させたときに安定性を保つギリギリの値をいう。この値はボード線図で見積ることができ、ゲイン余裕は位相が-180度のときのゲインの値から位相余裕はゲインが0 [dB]のときの位相の値からわかる。

一般的なロバスト制御理論は1980年代にはいつてから整備され、基本的には、開ループ伝達関数、感度関数、相補感度関数の周波数応答をコントローラにより整形することにより達成される。たとえば、開ループ伝達関数においては、目標値信号のある低周波域でそのゲインを大きくし(制御性能を上げる)、モデリング誤差の影響が大きい高周波域でゲインを下げる(ロバスト安定性を満足させる)ようにコントローラを設計する。もっと正確には、低周波域で感度関数のゲインを小さくし、高周波域で相補感度関数のゲインを下げるようにコントローラを設計すればよい。

3 アナログPID制御とデジタルPID制御

PID制御の歴史は古く、はるか70年前までさかのぼる。有名なZiegler & NicholsのPIDパラメータの調整法なども50年前のことである。このような古いものであるにもかかわらず、現在実用されているコントローラの80%以上を占めている。なぜ、未だにPID制御がすたれずに生き残っているかという理由は次の2つであると思われる。

1. コントローラの構造が簡単で、直感で理解しやすい。
2. システム構造の情報がおおまかなものでも、たいだいの性能は得られる。

本章では、フィードバック制御系の制御則であるPID制御とはどういうものか簡単に説明し、この制御則をアナログとデジタルで実現した場合の違いについて説明する。また、プロセス制御系におけるPIDコントローラのパラメータ調整方法についても述べる。

3.1 アナログPID制御とその調整法

連続時間で表現されるシステムを安定化し、かつ目標信号へ追従させるようなコントローラの一つとしてアナログPIDコントローラがあり、特にプロセス制御系にはよく用いられているものである。アナログPIDコントローラはオペアンプで実現することが出来る。

3.1.1 アナログPIDコントローラとは？

PID制御系のブロック線図を下に示す。ここで、コントローラは、設定値と出力の差、つまり偏差 $e(t)$

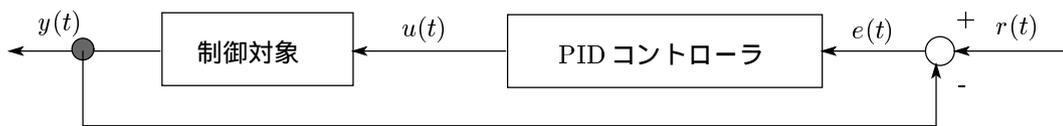


図 8: PID フィードバック制御系

を入力として、この値を比例倍したり (比例動作, P 動作), 積分したり (積分動作, I 動作), 微分したり (微分動作, D 動作) して、制御対象の入力値を出力する。式でかくと次式のようなになる。

$$u(t) = K_P(e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(t)dt + T_D \frac{de(t)}{dt}) \quad (13)$$

伝達関数表現すると次のようになる。

$$U(s) = C(s)E(s) = K_P(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D)E(s) \quad (14)$$

ただし、入力 $u(t)$ 、出力 $y(t)$ 、偏差 $e(t)$ のラプラス変換を各々 $U(s)$ 、 $Y(s)$ 、 $E(s)$ とした。また、 K_P 、 T_I 、 T_D は可調節パラメータであり、この値を調整することにより、 y を r に追従させたり、外乱や雑音に影響されない制御系をつくることができる。各々 K_P 、 $\frac{1}{sT_I}$ 、 sT_D の部分それぞれ比例 (Proportional)、積分 (Integral)、微分 (Derivative) 制御という。さらに、 $C(s)$ をPID制御器といい、 K_P を比例ゲイン、 T_I を積分時間、 T_D を微分時間とよぶ。また、比例、微分要素が出力を直接フィードバックし、積分要素のみが偏差をフィードバックするようなコントローラも考えられており、これをI-PD制御と呼ぶが、これについては次章で述べる。

なお、現実のプラントでは完全な意味での微分要素を実現することは不可能であるので、通常、次のような近似微分が用いられる。

$$K_Ds \approx \frac{K_Ds}{1 + \gamma K_Ds} \quad (15)$$

ここで、 $1/\gamma$ を微分ゲインといい、市販の調整器では10前後に固定されているものが多い。

一方、PIDコントローラの伝達関数を

$$C(s) = \frac{1}{s}(K_Ps + K_I + s^2K_D)$$

のように書き直し、まず、入力値の微分値を計算し、つぎにそれを積分演算して入力とする方式も考えられている。これを速度型のPID制御という。直接入力値を計算する(14)式を位置型のPID制御という。

次図が、PIDコントローラによる閉ループ系のステップ応答の代表例である。

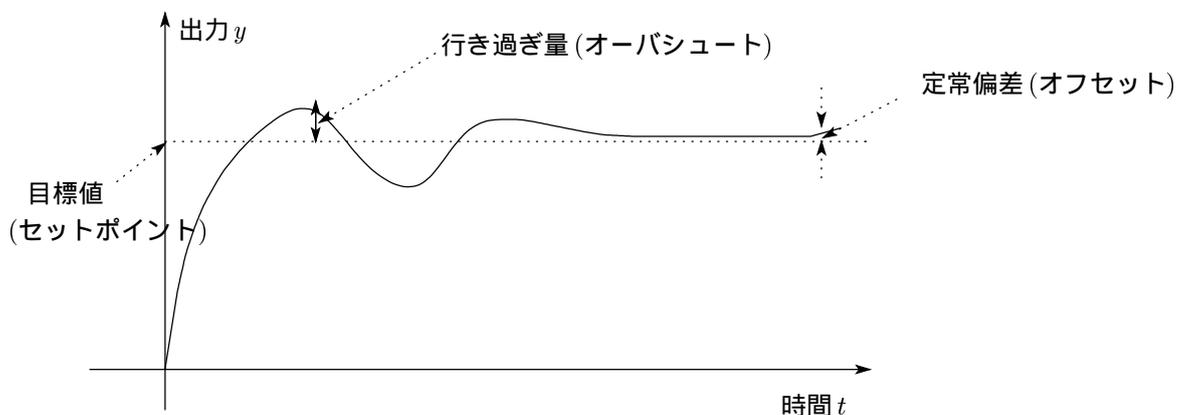


図 9: ステップ応答

コントローラがP動作のみの場合には、ふつうオフセット(定常偏差)が生じる。そこでI動作を付加することにより、オフセットを除去できる。さらに、応答のスピードアップのためにD動作をつけ加える。PIDコントローラはアナログ電子回路(IC化されている)で実現できる。そのもっとも基本的な回路をつぎに示す。

◎ オペアンプ: 図3(a)にオペアンプの回路記号を示す。2本の入力端子と1本の出力端子をもつ増幅器で、正負の2電源を必要とするが回路記号では省略されることが多い。入力信号を+端子に加えると、入力と同相の出力が出力端子に現れ、-端子に加えると入力とは逆相の信号が出力される。

◎ 比例器: ポテンショメータとオペアンプによるゲイン定数0~1の比例器の回路図を図3(b)に示す。 $e_o = Ke_i$, $e_o = Ke_i$

◎ 符号反転器: オペアンプとインピーダンス Z_i, Z_f を使った符号反転器を図4(c)に示す。 $\frac{e_i}{Z_i} + \frac{e_o}{Z_f} = 0$

◎ 積分器: オペアンプ, 抵抗とコンデンサを使った積分器を図4(d)に示す。 $e_o = -\frac{1}{T} \int e_i dt$, $T = CR$

◎ 微分器: オペアンプ, 抵抗とコンデンサを使った積分器を図4(e)に示す。 $e_o = -T \frac{de_i}{dt}$, $T = CR$

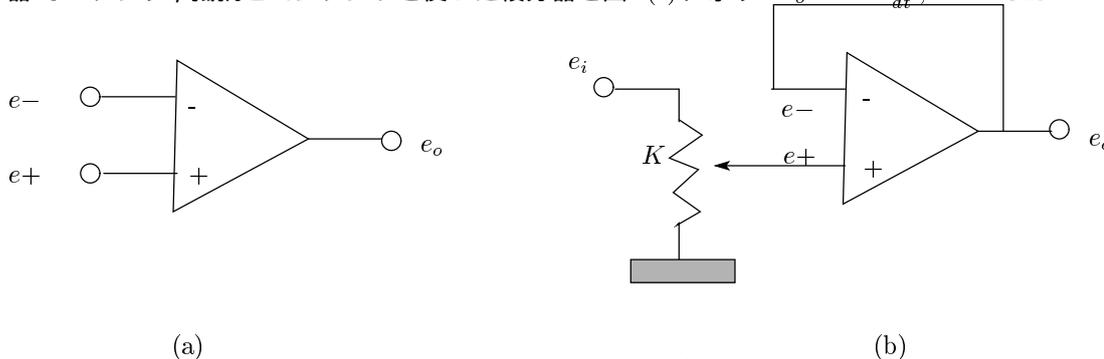


図 10: オペアンプ記号 (a) と比例器 (b)

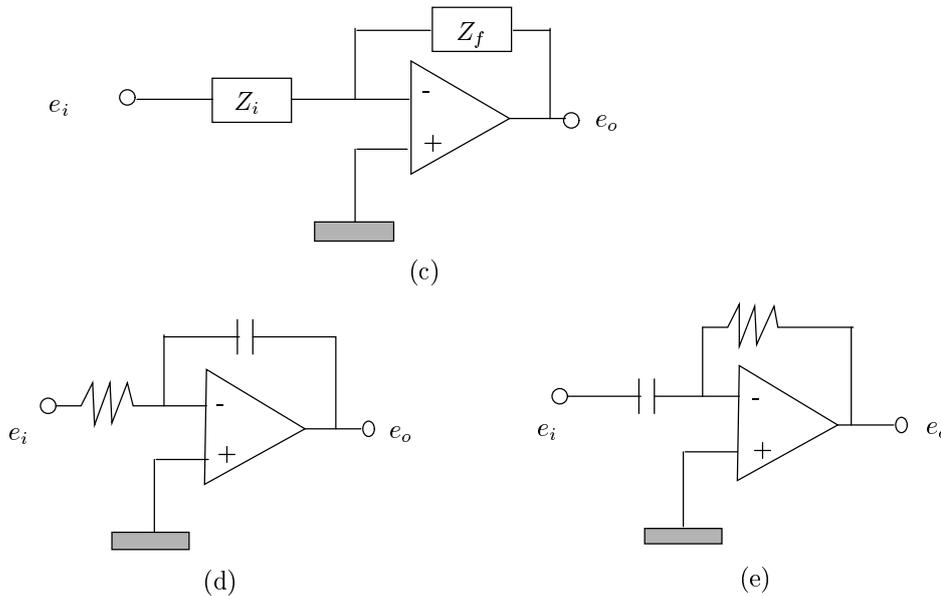


図 11: オペアンプによる符号反転器 (c), 積分器 (d), 微分器 (e)

3.1.2 アナログPIDコントローラによる定常特性改善のための指針

PID制御などのように, $H(s) = 1$ とし, 制御器を前置補償器のみとした制御系を単一フィードバック系 (Unity Feedback System) という. この場合には, 制御器の入力は, 偏差信号であり, 閉ループ伝達関数 $T(s)$ と感度関数 $S(s)$ には次の関係が成り立つ.

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (16)$$

この場合, 偏差は次のようにかかる.

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)P(s)D(s) + T(s)N(s) \quad (17)$$

この式は, 単一フィードバック系において同じ周波数領域では, $S(s)$ と $T(s)$ を同時には小さくできないことを意味している ((16) 式の意味で, $T(s)$ を相補感度関数という). しかし, 前述したように目標値と外乱は低周波域に, 雑音は高周波域にあることが通常である. そこで, 低周波域で伝達関数 $S(s)$ および $S(s)P(s)$ のゲインを小さくし, 高周波域で伝達関数 $T(s)$ のゲインを小さくすることにより, 外乱抑制と追従性能の両方が向上するような制御系を構成することが出来る. これは, 開ループ伝達関数 $G(s)C(s)$ のゲインを低周波域で大きく, 高周波域で小さくすることによっても達成できる.

このようにして, PID 制御器設計問題は, 設計パラメータ K_P, T_I, T_D を用いて, いかに関ループ伝達関数 $P(s)C(s)$ の周波数特性を整形するか, という問題に帰着される. どのようにして設計パラメータをチューニングしていくのが, 一番問題となる. 本資料では, プロセス制御系でよく用いられている古典的パラメータ調整法について述べる. 一般のロバスト制御問題では, コントローラの一般形を用いて, 伝達関数の周波数整形を行っているが, 本資料ではそこまで立ち入らない.

3.1.3 アナログPIDコントローラの直感的パラメータ調整法

定常特性と過渡特性を改善するための直感的なパラメータ調整の目安をのべる.

◎ オフセットを除くにはどうするか?

方法 1: P 動作のゲインをおおきくする (ハイゲインの一番初等的なもの)

ただし、制御対象によっては、入力振幅制限や不安定性などのためにあまりゲインをおおきくできない場合がある。

方法2:I動作をいれる。

I動作には、マニュアルリセットとオートマチックリセットの2つがある。マニュアルリセットとは、定常偏差が残ると、手動で偏差をゼロにするよう調整するようにしたものであるが、I動作素子を使えなかった時代の苦肉の策であった。I動作素子を使うものをオートマチックリセットという。

○ 行き過ぎ量を小さく抑えるにはどうするか？

P動作ゲインをあまりおおきくしない。I,D動作の調整をおこなう。

○ はやく収束させるにはどうするか？

D動作を大きくする。

上に代表的な指針をあげたが、あくまでも目安であり、P,I,Dの動作の微妙なチューニングが必要である。チューニングのやり方としては、1) 偏差の面積を積分したものを評価として、これを最小にするようなPIDゲインを最適化計算により求める、2) 振幅減衰比を25パーセントにするのが適当であるといく経験の結果をもとに、制御対象を1次おくれ要素とむだ時間に近似してPIDゲインを求める(限界感度法)がある。これを次に述べよう。

3.1.4 アナログPIDコントローラのパラメータチューニング法

PIDコントローラ

$$u(t) = K_P \left\{ e(t) + \frac{1}{T_I} \int e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right\}$$

のパラメータチューニング法はこれまで種々のものが提案されている。大別するとつぎのようになる。詳しくは、文献[17]を参照されたい。

1. 閉ループの応答特性に基づく方法(限界感度法, 1/4減衰法など)
2. 制御対象のステップ応答に基づく方法(過渡応答法, 高橋の方法, Cohen & Coonの方法など)
3. 制御対象のステップ応答のモーメントに基づく方法(北森の方法など)

なお、北森の方法は次章で述べる。

限界感度法

まず、PIDコントローラの比例制御のみを用いて、ゲインを増加させる。そうすると、出力の応答波形は振動的になり、ついには安定限界を越えて発信状態となる。そこで、発信状態になる一歩手前の安定限界(持続振動)になったときの比例ゲイン K_c と周期 T_c を求める。この値から、PIDコントローラのパラメータを次のように定める(Ziegler & Nicholsの調整法)。

制御形態	比例ゲイン K_P	積分時間 T_I	微分時間 T_D
P	$0.5K_c$		
PI	$0.45K_c$	$0.833T_c$	
PID	$0.6K_c$	$0.5T_c$	$0.125T_c$

過渡応答法

システムが積分 + むだ時間つまり、

$$G(s) = \frac{R}{s} e^{-sL} \quad (18)$$

で近似できる無定位プロセスの場合に，Ziegler & Nichols はつぎのようなPIDパラメータの調整法を提案した．これを過渡応答法という．

制御形態	比例ゲイン K_P	積分時間 T_I	微分時間 T_D
P	$1/RL$		
PI	$0.9/RL$	$L/0.3$	
PID	$1.2/RL$	$2L$	$0.5L$

高橋の方法

上と同じ無定位プロセスの場合に，高橋は外乱のステップ状変化に対するIAE(偏差の絶対積分)を最小にするPIDパラメータを数値計算により求めた．

制御形態	比例ゲイン K_P	積分時間 K_I	微分時間 K_D
P	$0.9/RL$		
PD	$1.1/RL$		$0.44L$
PI	$0.9/RL$	$3.3L$	
PID	$1.3/RL$	$2.2L$	$0.45L$

IAE,ISE,ITAEを最小にするパラメータ調整法

高橋の方法もその1例であるように，この様な調整法は，数値計算により導出できる．主なものは，Lopez, Millerらの方法である．与えられるパラメータについては[17],[28]を参照されたい．

3.2 デジタルPIDコントローラの実現方法

3.2.1 デジタル信号の取扱い

アナログPIDコントローラをデジタル化したものが，デジタルPIDコントローラであるが，まえにも述べたように次の点に注意する．A/D変換器はサンブラ，D/A変換器はホールダとみなして，量子化については無視する．ここで，アナログ信号 $f(t)$ を周期 θ でサンプリングしたときのデジタル信号を $f[k]$, $k = 0, 1, \dots$ とかくことにする．つまり， $f[k] = f(k\theta)$, $k = 0, 1, \dots$ である．このとき，アナログPID動作をデジタル化するとつぎのようになる．

3.2.2 P動作のデジタル化

アナログP動作

$$u(t) = Ke(t) \quad (19)$$

は，そのままサンプリングにおきかえる．つまり，デジタルP動作は，

$$u[k] = Ke[k] \quad (20)$$

となる．

3.2.3 I動作のデジタル化

アナログI動作

$$u(t) = \frac{1}{T_I} \int e(t) dt \quad (21)$$

は，台形公式近似でおきかえる．つまり，デジタルI動作は，

$$u[k] = \frac{\theta}{T_I} \sum_{i=1}^k \frac{e[i-1] + e[i]}{2} \quad (22)$$

となる．

3.2.4 D動作のデジタル化

アナログD動作

$$u(t) = T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (23)$$

は，差分近似で置き換える．つまり，

$$u[k] = \frac{T_D}{\theta} (e[k] - e[k-1]) \quad (24)$$

3.2.5 PID制御器のデジタル化

以上をまとめると，(1)式に対するデジタルPID動作は次式のようになる．

$$u[k] = K \left\{ e[k] + \frac{\theta}{T_I} \sum_{i=1}^k \frac{e[i-1] + e[i]}{2} + \frac{T_D}{\theta} (e[k] - e[k-1]) \right\} \quad (25)$$

ここで，この値がホールドされて制御対象の入力となることに注意する．上の計算則をトータルアルゴリズム(位置アルゴリズム)という．

一方，制御則を上式のサンプリングごとの偏差で計算し，あとで積分する計算則を速度アルゴリズムという．速度アルゴリズムは次のようになる．まず，偏差 $d[k]$ を次式のようにおく．

$$d[k] = u[k] - u[k-1] \quad (26)$$

また，設定値を $r[k]$ をおくと，偏差は次式のようになる．

$$e[k] = r[k] - y[k] \quad (27)$$

さらに，設定値に関して3サンプリングに関して不変，つまり，

$$r[k-2] = r[k-1] = r[k] \quad (28)$$

と仮定する．このとき， $d[k]$ は次式のように変形できる．

$$d[k] = K \left\{ \{y[k-1] - y[k]\} + \frac{\theta}{T_I} \left\{ r[k] - \frac{y[k-1] + y[k]}{2} \right\} + \frac{T_D}{\theta} \{2y[k-1] - y[k-2] - y[k]\} \right\} \quad (29)$$

さらに，

$$K_P = K - \frac{K_I}{2} \quad (30)$$

$$K_I = K \frac{\theta}{T_I} \quad (31)$$

$$K_D = K \frac{T_D}{\theta} \quad (32)$$

とおくと、次式のようになる。

$$d[k] = K_P\{y[k-1] - y[k]\} + K_I\{r[k] - y[k]\} + K_D\{2y[k-1] - y[k-2] - y[k]\} \quad (33)$$

ここで、上式の K_P, K_I, K_D をデジタルPIDゲインという。ここで、設定値はI動作のみに含まれているので、 K_I をゼロにすることはできないことに注意する。

いま、2つのアルゴリズムをあげたが実際には速度アルゴリズムが好まれる。それは次の理由による。

1. 故障時の安全性: トータルアルゴリズムの場合、コントローラが故障すると操作量 $u[k]$ が正常でなくなりゼロとなることが多いが、速度アルゴリズムの場合には、故障後、 $d[k]$ をゼロとなると、故障前の $u[k]$ を保持できる。
2. set-point kick の除去: set-point kick とは設定値の突変にともなってP,D動作により操作量が飛躍する現象をいうが、速度アルゴリズムのほうが設定値の影響をP,D動作が受けないので、この現象の除去が可能になる。
3. 入力飽和の影響の軽減: 操作量に上限に制限のある制御対象に対しては速度アルゴリズムの方が、上限内に入る本来の操作量をはやく算出できるので、行き過ぎ量などを小さくできる。

ただし、最適レギュレータなどに代表される現代制御理論(アドバンスト制御)においては、トータルアルゴリズムの方が適している。なぜならば、速度アルゴリズムの場合には操作量の絶対値がえられず、それを必要とするアドバンスト制御では使えないからである。

3.3 種々のデジタルコントローラ再設計法

前節では、アナログPIDコントローラとそのデジタル近似に基づくコントローラについて説明したが、本節ではPIDも含めたもっと一般のアナログコントローラに対するデジタルコントローラの設計法についてのべる。デジタルコントローラを設計するには、通常2つの方法がある。1つは、ホールダ+制御対象+サンプラを1つの離散時間システムとみて、これに対してデジタルコントローラを設計する方法である。もう1つは、まず制御対象に対するアナログコントローラを設計し、これをなんらかの手法でデジタルに近似するものである。後者の方法をデジタル再設計といい、つぎのような有用性をもっている。

1. すでにアナログコントローラのもとでうまく動作している制御系をデジタルコントローラで実現しやすい。
2. 離散時間システムはサンプリング周期に依存しているので、サンプリング周期が変わるたびにコントローラを設計しなおさなければならないが、デジタル再設計では、1度アナログコントローラを設計しておけば、サンプリング周期をある程度短くすれば、このアナログコントローラをデジタル近似することによりデジタルコントローラをえることができる。

さらに、デジタル再設計にも、コントローラの開ループ伝達特性に基づく方法と閉ループ系の時間応答に基づく方法の2つがある。以下では、連続制御系設計法をメインと考え、それで設計されたコントローラをデジタル近似して用いるという立場にたち、前者のみについて説明する。

3.3.1 アナログコントローラのデジタル化

アナログコントローラの伝達関数をデジタルコントローラの伝達関数(パルス伝達関数)で近似する方法には次のようなものがある。

1. インパルス不変変換
2. 後退差分変換
3. 双1次変換
4. 整合 z 変換

3.3.2 インパルス不変変換

コントローラの伝達関数 $C_c(s)$ を z 変換したものをデジタルコントローラの伝達関数 $C_d[z]$ とする変換をインパルス不変変換という。つまり、次式となる。

$$C_d[z] = Z\{C_c(s)\} \quad (34)$$

たとえば、PIコントローラの場合には次のようになる。まず、アナログPIコントローラの伝達関数を次式のようにおく。

$$C_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad (35)$$

このとき、デジタルPIコントローラは次のようになる。

$$C_d[z] = K_P + \frac{K_I z}{z-1} \quad (36)$$

3.3.3 後退差分変換

微分値を後退差分で近似する方法を後退差分変換という。前章でアナログD動作をデジタル近似したものを説明したが、これが後退差分である。さらに積分についてはこの逆をとる。つまり、次式となる。

$$C_d[z] = C_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (37)$$

なぜならば、後退差分

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e[k] - e[k-1]}{T} \quad (38)$$

の左辺をラプラス変換し、右辺を z 変換すると次のようになるからである。

$$sE(s) \approx \frac{1-z^{-1}}{T} E[z] \quad (39)$$

たとえば、アナログPIDコントローラを、

$$C_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + sK_D \quad (40)$$

とおくと、デジタルPIDコントローラは

$$C_d[z] = K_P + \frac{K_I T z}{z-1} + \frac{K_D (z-1)}{T z} \quad (41)$$

3.3.4 双1次変換

積分値を台形公式で近似する方法を双1次変換 (Tustin 変換, 台形積分法ともいう) という。前章でアナログI動作をデジタル近似したものを説明したが、これが台形公式である。さらに微分についてはこの逆をとる。つまり、次式となる。

$$C_d[z] = C_c(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad (42)$$

なぜならば、 $u[k]$ を $e(t)$ の台形公式近似、

$$u[k] = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^k (e[i-1] + e[i]) \quad (43)$$

とすると、次式が成立する。

$$u[k] - u[k-1] = \frac{T}{2} (e[k-1] + e[k]) \quad (44)$$

これを z 変換すると、

$$U[z] = \frac{T(z+1)}{2(z-1)} E[z] \quad (45)$$

となるからである。たとえば、アナログPIDコントローラの変換は次のようになる。

$$C_d[z] = K_P + \frac{K_I T(z+1)}{2(z-1)} + \frac{2K_D(z-1)}{T(z+1)} \quad (46)$$

それぞれの変換について、1長1短があるが双1次変換がいちばんよく用いられる。

4 PID 制御の発展形

4.1 微分先行型PID制御—PI-D制御

PID制御は偏差信号のすべてに比例、積分、微分の動作が行われる。この場合には、ステップ関数などの急激に変化する目標入力を加えると、これにもろに微分動作がかかってしまい、アクチュエータにはこのような急激な動作が行えず、不都合なことが多い。そこで、下図のように、微分動作のみは出力信号のみにかかるようにしたものが微分先行型PID制御である。これはPI動作が前置補償器として、D動作がフィードバック補償器として見なせることからPI-D制御ともいわれる。制御則を式で書くと次のようになる。

$$u(t) = K_P \left\{ \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) e(t) - sT_D y(t) \right\} \quad (47)$$

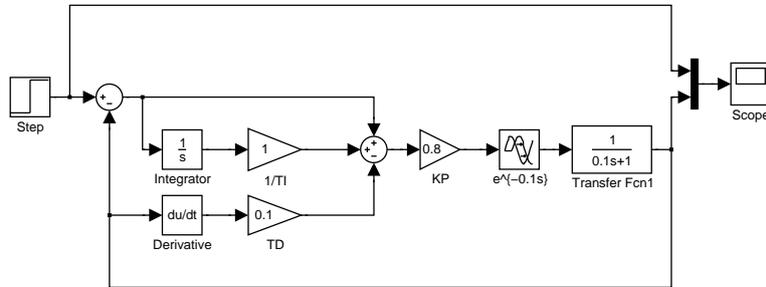
PID制御とPI-D制御では、外乱から制御量までの伝達関数は等しいが、目標入力から出力までの伝達関数は異なってくるので注意を要する。

制御対象の伝達関数を $G(s)$ として、PI-D制御による閉ループ系に目標値として単位ステップ信号を加えたときの、ステップ応答をSimulinkを用いて出力してみよう。制御対象の伝達関数とコントローラをつぎのようにおく。

$$G(s) = \frac{1}{0.1s+1} e^{-0.1s}, K_P = 0.8, T_I = 1, T_D = 0.1$$

Simulink 図 `pid\pi_d_stepres.mdl` はつぎのようになる。このときの応答データは、SimulinkのScopeのプロパティのデータヒストリでワークスペース上に名前 `outsignal` で保存するように指定していると、つぎのMファイルを実行することにより、応答波形をグラフ化できる。

```
plot(outsignal.time, outsignal.signals.values(:,1), 'r--', ...
     outsignal.time, outsignal.signals.values(:,2), 'b-')
xlabel('time'), ylabel('output')
```



Plot step response

Draw stepresponse after simulation

図 12: Simulink 図

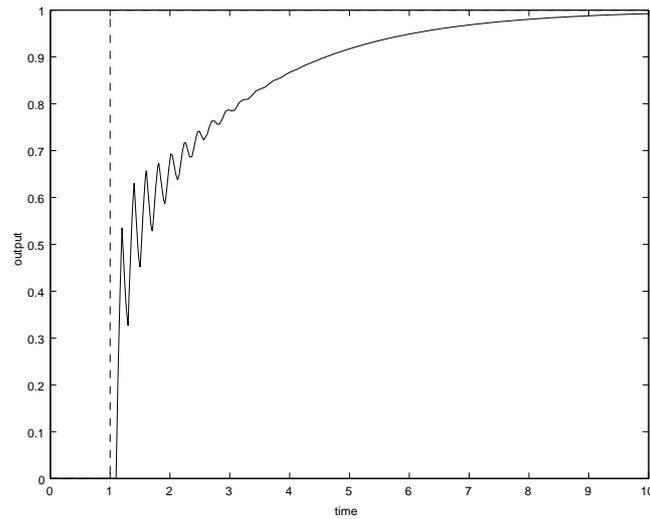


図 13: ステップ応答

4.2 比例・微分先行型PID—I-PD制御

PI-Dと同様の理由で、さらにアクチュエータにステップ状の信号が加えづらい場合には、比例、微分動作の両方をフィードバック補償器とし、前置補償器は積分動作のみとしたものが比例・微分先行型PID(I-PD制御)である。制御則は次式のようなになる。

$$u(t) = K_P \left\{ \frac{1}{sT_I} e(t) - (1 + sT_D)y(t) \right\} \quad (48)$$

目標値入力に積分動作にしか含まれないので、これを除くことはできない。I-PD制御のブロック線図は次のようになる(Simulink 図pid\i_pd_stepres.mdl)。I-PD制御は変形すると次のようなブロック線図にな

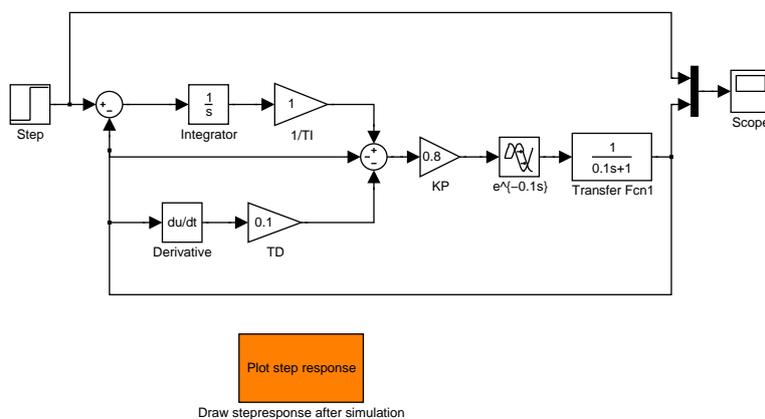


図 14: I-PD コントローラ Simulink 図

るので、これは目標値を2次遅れフィルタに通してからPID制御の目標値入力としたものに等しいことがわかる(Simulink 図pid\i_pdf_stepres.mdl)。ここで、2次遅れフィルタの伝達関数は、 $\frac{1}{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}$ となる。

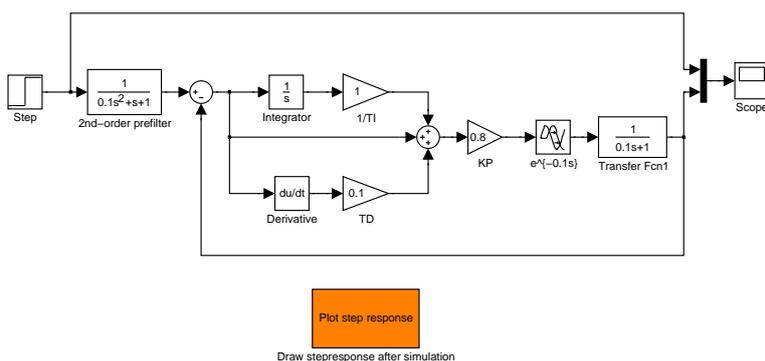


図 15: I-PD コントローラと等価なPID コントローラ Simulink 図

I-PD制御では目標値には積分動作しか効いてこないなので、目標値の変化がすぐには出力に現れてこず、目標値への追従が遅くなる傾向にある。そこで、これを改善するためのパラメータ調整法として北森の方法[18]がある。

4.2.1 北森の方法

北森の方法とは，閉ループ伝達関数 $G_c(s)$ を手本となる伝達関数 $M(s)$ に近くなるようにパラメータ調整しようというモデルマッチングの1手法である．ただし，

$$M(s) = \frac{1}{1 + \tau s + \alpha_2(\tau s)^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau s)^{n-1} + \alpha_n(\tau s)^n} \quad (49)$$

であり， τ の大きさは立ち上がり時間の目安となる．また，他の係数は，極の配置やITAEによる評価を入れることにより計算することができる．モデルマッチングのやり方は， $\frac{1}{M(s)}$ が

$$\frac{1}{M(s)} = 1 + \tau s + \alpha_2(\tau s)^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\tau s)^{n-1} + \alpha_n(\tau s)^n \quad (50)$$

と表されることから， $\frac{1}{G_c(s)}$ を s に関する無限級数として展開(マクローリン展開)し，その係数比較を行い，低い次数の方から合わせていく，というものである．閉ループ伝達関数の逆は次のように計算される．

$$\frac{1}{G_c(s)} = K(s) + \frac{s}{K_P T_I G(s)} \quad (51)$$

ただし，

$$K(s) = 1 + T_I s + T_I T_D s^2$$

とする．さらに，制御対象の伝達関数 $\frac{1}{G(s)}$ のマクローリン展開を

$$\frac{1}{G(s)} = a_0 + a_1 s + \cdots + a_k s^k + \cdots$$

とおくと，次式が成り立つ．

$$\frac{1}{G_c(s)} = 1 + (T_I + \frac{a_0}{K_P T_I})s + (T_I T_D + \frac{a_1}{K_P T_I})s^2 + \frac{a_2}{K_P T_I}s^3 + \cdots \quad (52)$$

これから係数比較により次の関係が得られ，

$$\begin{aligned} T_I + \frac{a_0}{K_P T_I} &= \tau \\ T_I T_D + \frac{a_1}{K_P T_I} &= \alpha_2 \tau^2 \\ \frac{a_2}{K_P T_I} &= \alpha_3 \tau^3 \end{aligned}$$

これから，PIDパラメータがつぎのように計算できる．

$$\begin{aligned} T_I &= \tau - \frac{a_0}{a_2} \alpha_3 \tau^3 \\ K_P &= \frac{a_2}{\alpha_3 \tau^3 T_I} \\ T_D &= \frac{1}{T_I} (\alpha_2 \tau^2 - \frac{a_1}{K_P T_I}) \end{aligned}$$

4.3 フィードフォワード併用PID制御

フィードバック制御はシステムのモデル化誤差や直接測定できない外乱の影響を小さくできるが，もしもこれらが既知の場合には直接入力として加えてその影響をキャンセルする方が速応性がよくなる．そこで，入力をフィードバック部分とフィードフォワード部分の両方を使った制御方法が考えられる．次のような制御系を考える．

$$Y(s) = P_U(s)U(s) + P_W(s)W(s) \quad (53)$$

ただし， $Y(s)$ は出力， $U(s)$ は制御対象に対する入力， $W(s)$ は測定可能な外乱とする．次のような制御則がフィードフォワード併用PID制御になる．

$$\begin{aligned} U(s) &= U_F(s) + U_B(s) \\ U_F(s) &= C_R(s)R(s) + C_W(s)W(s) \\ U_B(s) &= C_B(s)(R(s) - Y(s)) \end{aligned}$$

ただし， $C_B(s)$ はPIDコントローラであり， $C_R(s), C_W(s)$ はフィードフォワードコントローラで希望の伝達関数を実現するように選ぶことになる．

4.3.1 条件付きフィードバック制御

フィードフォワード併用PID制御において，もし $R(s)$ と $Y(s)$ が一致したとすると，フィードバック部分 $U_B(s)$ はゼロになるので，理想状態では出力 $Y_*(s)$ は次式のように考えられる．

$$Y_*(s) = P_U(s)U_F(s) + P_W(s)W(s)$$

フィードバックコントローラにおいて，目標値の代わりに，この理想状態の出力を使って

$$U_B(s) = C_B(s)(Y_*(s) - Y(s))$$

と変形したものが Lang & Ham により提案されている．

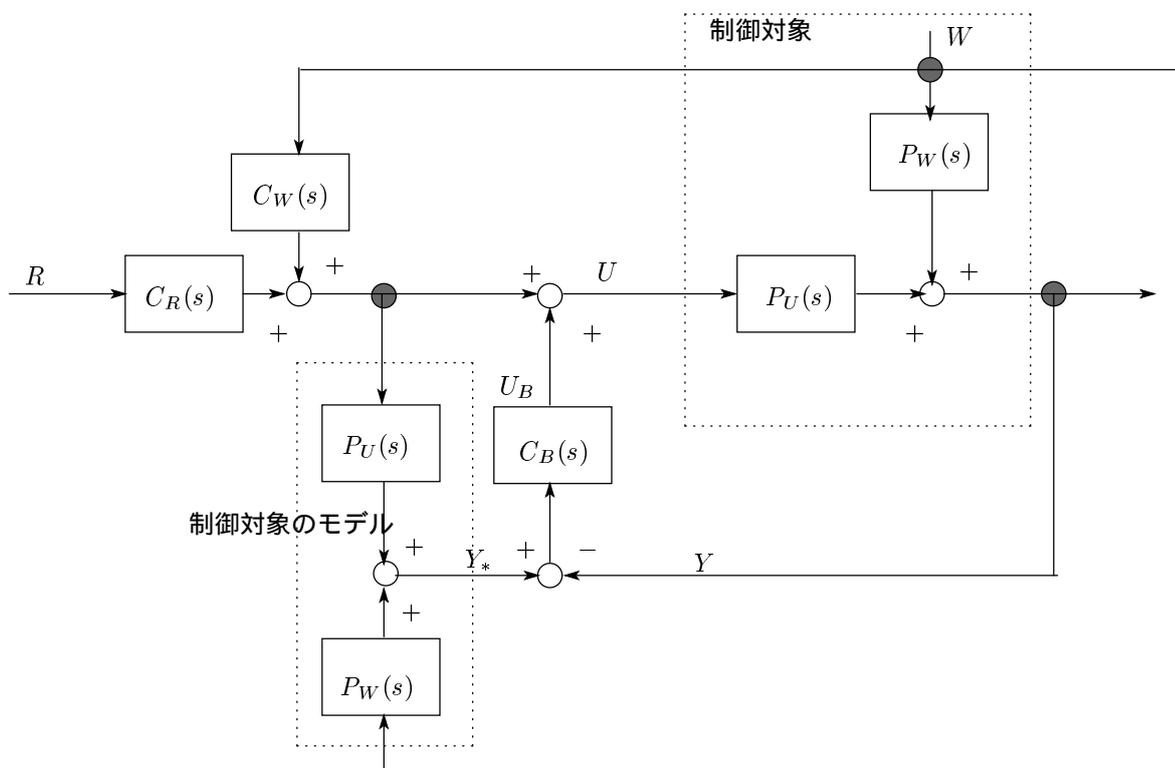


図 16: 条件付フィードバック制御系

4.3.2 内部モデル制御 (IMC)

制御対象の出力は入力 $U(s)$ と外乱 $W(s)$ により計算することができる。

$$\hat{Y}(s) = P_U(s)U(s) + P_W(s)W(s)$$

この計算した出力 $\hat{Y}(s)$ を出力の予測値という。条件付きフィードバック制御において理想状態の出力の代わりに、この値を用いたものを **Internal Model Control (IMC)** という。IMCはモデル予測制御の一般構造を的確に説明している。このブロック線図は次のようになる。

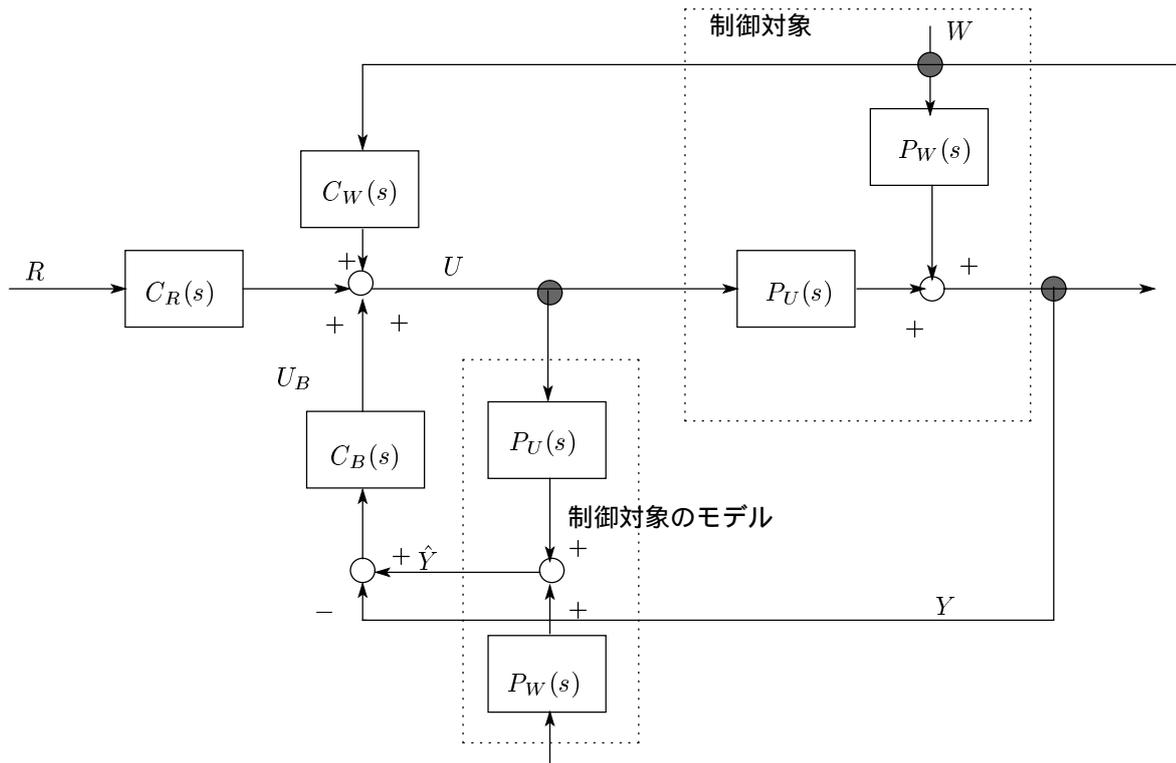


図 17: IMC 制御系

4.4 スミス補償型PID制御

スミス補償器はむだ時間を持つプラント

$$P(s) = P_0(s)e^{-Ls} \tag{54}$$

を内部モデルを用いて補償するものであるが、この制御系は次図のようにまとめることができる。この系で、 $C(s)$ をPIDコントローラにしたものが、スミス補償型PID制御である。単一入出力系の場合には、スミス補償器による閉ループ伝達関数は次式のように変形できる。ただし、外乱は $W = 0$ とする。

$$Y(s) = \frac{\frac{CP_0e^{-Ls}}{1+CP_0(1-e^{-Ls})}}{1 + \frac{CP_0e^{-Ls}}{1+CP_0(1-e^{-Ls})}} R(s) = \frac{CP_0}{1+CP_0} e^{-Ls} R(s) \tag{55}$$

これから、むだ時間はフィードバックループの外側にできることになり、むだ時間は安定性に影響を与えなくなることがわかる。

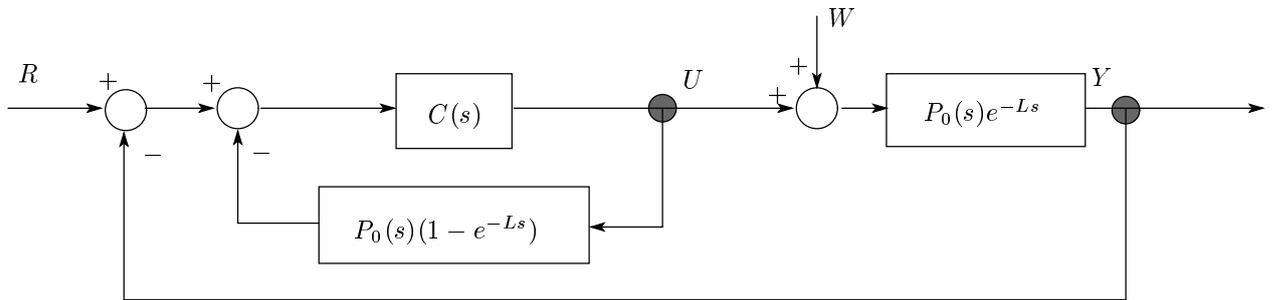


図 18: スミス補償器による閉ループ系

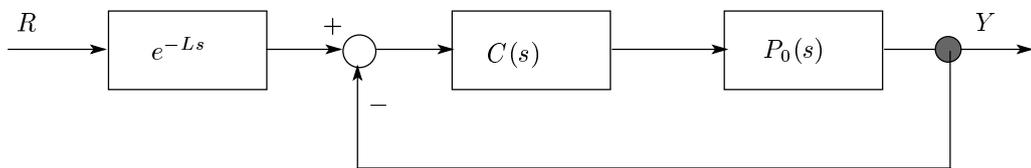


図 19: スミス補償器による閉ループ系の等価系

4.5 非干渉PID制御

制御量と操作量が複数個ある多変数系では、操作量の影響が複数の制御量に影響を与えるのは普通である。コントローラを入れて、1つの目標値が1つの制御量だけに影響を与え、他の制御量に影響を与えないようにするのが、非干渉制御である。非干渉化ができれば、多変数系でも単一入出力系と同様の設計が可能になる。

4.6 2自由度PID制御

PI-D制御やI-PD制御では、前置補償部分とフィードバック補償部分をもつコントローラを考えた。この他にもいろいろなパターンが考えられるが、これらのように、前置補償部分やフィードバック補償部分やフィードフォワード補償部分にPID動作を用いるものを2自由度PID制御という。これについては[17]を参照のこと。

4.7 可変パラメータPID制御

プロセス制御系においては、PIDパラメータを偏差信号に応じて変更する可変パラメータPID制御が用いられることがある。また、プロセスのパラメータが操業条件によって変化するとき、このパラメータの変動範囲にわたってPIDコントローラをチューニングし直すことがある。通常は比例ゲインのみをチューニングし、積分時間、微分時間は固定することが多く、これをゲインスケジューリングという。また、可変パラメータPID制御は、適応制御の1特殊形とみなすこともできる。詳細については省略する。

4.8 PID+Q コントローラ

現代制御理論の最先端であるロバスト制御理論 [22] は、すべてのコントローラの一般形をもとに組み立てられている。これは一つの特異なコントローラに自由に選べる伝達関数項を付け加えることにより一般の安定化補償器を与えるものであり、ベースとなる特異なコントローラをPID コントローラとしても選ぶことができる。これは、PID コントローラに調整項を入れることによって一般のコントローラを得ることができることを表している [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]。さらに、このコントローラはIMCの一般化となっている。

4.9 最近の動向

最近では、ロバスト制御の立場からのPID コントローラ的设计が行われるようになっている [29],[31]。また、計算能力の飛躍的進歩に伴い、多目的的设计仕様を同時に達成するコントローラを数値的最適化計算を用いて計算することも行われている [39],[40]。さらに、遺伝的アルゴリズムを用いたPID コントローラ设计法も提案されている [30]。詳しく、それぞれの文献を参照されたい。ここでは、MATLABのNonlinear Control Toolbox をもちいて非線形最適化計算を行うことによりPID コントローラを求める例題をあげる。

4.9.1 非線形最適化計算による多目的PID コントローラ的设计例

MATLABのNonlinear Control Toolbox では、制御系设计仕様を含む各種の制約条件を非線形不等式の形で与え、これをMATLABのOptimization Toolboxの中の逐次2次計画法の関数constr()を用いて計算する。Nonlinear Control Design Toolboxによるコントローラ的最適化計算の手順はつぎのようにして行われる。

1. Simulinkを用いて制御系を記述する。目標値信号も設定する。
2. 制約を設ける信号にNCD ブロック (Simulinkの中のncdblock) を追加する。
3. MATLABのワークスペース上に、最適化計算してチューニングすべきパラメータの初期値を与える。
4. NCD ブロックをオープンして、制約を設ける出力の制約条件をグラフィカルに設定する。
5. NCD ブロックのOptimizationメニューのParametersを選択して、最適化パラメータの指定を行う。
6. OptimizationメニューからUncertaintyを選択して、変動するパラメータの変動範囲の指定を行う。
7. Startメニューで実行を始める。

ここでは、MATLAB Nonlinear Control Design Toolboxのマニュアルの例をとりあげる。対象とするプラントモデルは次式で与えられているとする。

$$G(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0 \zeta s + \omega_0^2} e^{-Ls}$$

ただし、 $\zeta = 1, \omega = 1, L = 1$ とする。コントローラはPID コントローラで、探索パラメータは K_p, K_i, K_d とする。

$$C(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + s K_d$$

このシステムに対して目標値としてステップ信号を入力して、閉ループ系がつぎの仕様を満たすようにコントローラの積分ゲイン K_p, K_i, K_d をチューニングする。

- オーバーシュートは10%以内
- 立ち上がり時間は5秒以内
- 整定時間は50秒以内

手順1,2を実行するとつぎのようにSIMULINKにより制御系が表せる。

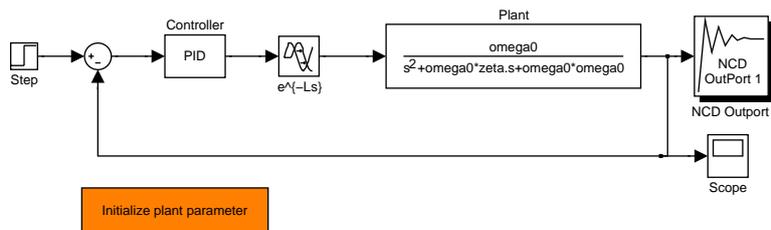


図 20: Nonlinear Control Design Simulink 図

Mファイルparaset_ncd.mでシステムパラメータとコントローラゲインの初期設定値をつぎのように与えるとする。

```
% Plant parameter setting
omega0 = 1;
zeta = 1;
L = 1;
Kp = 0.1;
Ki = 0.1;
Kd = 0;
```

ついで、NCDブロックをクリックして開き、上記の応答波形の制約をグラフィカルに設定する。さらに、Optimizationメニューでチューニングパラメータを設定して、最適化計算を開始する。また、パラメータ変動がある場合にもそのパラメータの変動の範囲をOptimizationメニューのUncertaintyにより設定し、その変動範囲のランダムなプラントに対して制約条件をみたすようなゲインをチューニングできる。結果は、つぎのようになる。

```
Setting up constraint window ..... done

Processing uncertainty information.
Uncertainty turned off.
Setting up call to optimization routine.
Done plotting the initial response.
Start time: 0 Stop time: 100.
There are 202 constraints to be met in each simulation.
There are 3 tunable variables.
There are 1 simulations per cost function call.
f-COUNT    MAX{g}        STEP Procedures
      5      0.445675         1
     10      0.1264         1  Hessian modified
```

☒ 21: Nonlinear Control Design

```
15    0.104722    1
20    0.0557529   1
25   -0.00920171  1   Hessian modified
26   -0.00999975  1   Hessian modified
```

Optimization Converged Successfully

Active Constraints:

```
110
149
```

>> Kp

```
Kp =
    0.2796
```

>> Ki

```
Ki =
    0.2599
```

>> Kd

```
Kd =
    0.1599
```

4.9.2 製品としてのPIDコントローラ

コントローラに対する産業界の要求としてはつぎのようなものが考えられるであろう。

1. 操業中の入出力データからシステムを自動的に同定し、かつ、自動的にコントローラのパラメータチューニングをやってほしい。
2. 安全な装置であって欲しい。
3. なるべくシンプルで、わかりやすい装置にしてほしい。
4. 製品価格やランニングコストが安価であって欲しい。

1. に対する制御理論屋の努力は、適応制御(モデル規範型適応制御, セルフチューニングレギュレータ)という形になって実現されつつある。しかし、この理論は結構複雑であり、とても3.の要求を満たしているとは言えない。また、外乱などにも弱く、2.の要求にも結構苦しいところがある(2.の要求を満たすべく、ロバスト適応制御が盛んに研究されている)。4.については制御理論屋の責任を越えているので、なんともいえない。3.や4.の要求を満たすのが、PIDコントローラであろう。現在製品として売り出されているコントローラは主にPIDコントローラであるが、1.に対する要求に答えたものとしてオートチューニングコントローラがある。このコントローラのチューニング方式は大別して次の2つである。

1. システム同定 + PIDパラメータ計算

2. エキスパート法

熟練者のチューニング方法を計算機にのりやすい形に直したもの。ルールベース型、AI推論型、ファジィ推論など

具体的な各社の製品概要については、[17]を参照されたい。

5 静的出力フィードバックをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーション

本節では，既約分解表現の代わりに状態空間表現を用いて，一般化プラントのすべての安定化補償器のパラメトリゼーションを導出する [9, 10, 11]．ここで得られるパラメトリゼーションは中心部分に出力の直達項をもち，特殊ケースとして状態フィードバックが可能なプラントの安定化補償器のパラメトリゼーションを含んでいる．

つぎの可安定，可検出な n 次一般化プラント $G(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (56)$$

とそれを安定化する p 次動的補償器 $K(s)$

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]. \quad (57)$$

を考える．

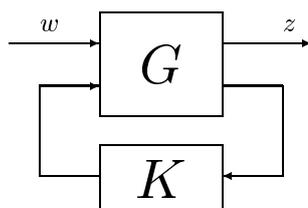


図 22: Generalized plant and its compensator.

上記のシステムの閉ループ伝達関数 $T_{zw}(s)$ は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} T_{zw}(s) &= \mathcal{F}_l(G, K) \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ \hline B_c C_2 & A_c & B_c D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

外部信号 $w = 0$ のとき，すべての初期状態から $G(s)$ と $K(s)$ の状態がゼロに収束するとき，閉ループ系は内部安定であるという．言い換えると，閉ループ伝達関数の A -行列である A_{clp} が安定であるとき，閉ループ系は内部安定であるという．ここで， A_{clp} は次式とする．

$$A_{clp} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

また，閉ループ系を内部安定化する動的補償器を安定化補償器と呼ぶ．

(58) をつぎの正則行列

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X & -I_p \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}, \end{aligned}$$

により相似変換すると，閉ループ伝達関数の別の実現がつぎのように得られる．

$$T_{zw}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{D} \end{array} \right] \quad (59)$$

ただし，各行列はつぎのように与えられる．

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= A + B_2 C_c X + B_2 D_c C_2 \\ \hat{A}_{12} &= -B_2 C_c \\ \hat{A}_{21} &= X(A + B_2 D_c C_2) - A_c X + X B_2 C_c X - B_c C_2 \\ \hat{A}_{22} &= A_c - X B_2 C_c \\ \hat{B}_1 &= B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ \hat{B}_2 &= X(B_1 + B_2 D_c D_{21}) - B_c D_{21} \\ \hat{C}_1 &= C_1 + D_{12}(C_c X + D_c C_2) \\ \hat{C}_2 &= -D_{12} C_c \\ \hat{D} &= D_{11} + D_{12} D_c D_{21}. \end{aligned}$$

そこで，一般化プラントを内部安定化する動的補償器を1つ見つけることにする．もしも

$$\begin{aligned} \hat{A}_{21} &= X(A + B_2 D_c C_2) \\ &\quad - A_c X + X B_2 C_c X - B_c C_2 = 0, \\ \hat{A}_{11} &: \text{安定}, \\ \hat{A}_{22} &: \text{安定}, \end{aligned} \quad (60)$$

を満足するような行列 X が存在するならば， (A_c, B_c, C_c, D_c) は安定化補償器となる．特に， $n = p$ のとき， $D_c = 0$ と $X = I_n$ が (60) の解となることがわかる．この場合，安定化補償器は次式のように与えられる．

$$\begin{aligned} A_c &= A + B_2 C_c - B_c C_2, \\ C_c &\text{ s.t. } A + B_2 C_c \text{ is stable,} \\ B_c &\text{ s.t. } A - B_c C_2 \text{ is stable.} \end{aligned}$$

このような補償器は observer-based controller と呼ばれる．

もっと一般の補償器を導くために，安定化補償器の次元はプラントの次元よりも高い，つまり $p > n$ と仮定する． n よりも次数の低い補償器は不可制御，不可観測な部分をもつ $p > n$ なる補償器として表現することに注意する [5]．補償器をつぎのように分割する．

$$K(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{c11} & A_{c12} & B_{c1} \\ A_{c21} & A_{c22} & B_{c2} \\ \hline C_{c1} & C_{c2} & D_c \end{array} \right] \quad (61)$$

ただし， $A_{c11} \in R^{n \times n}$ ， $A_{c22} \in R^{(p-n) \times (p-n)}$ とする．相似変換

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ X_1 & -I_n & 0 \\ X_2 & 0 & -I_{p-n} \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}, \end{aligned}$$

を行うと，(60) はつぎのように分割できる．

$$\begin{aligned} X_1(A + B_2D_cC_2) - A_{c11}X_1 + A_{c12}X_2 \\ + X_1(B_2C_{c1}X_1 + B_2C_{c2}X_2) - B_{c1}C_2 = 0 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} X_2(A + B_2D_cC_2) - A_{c21}X_1 + A_{c22}X_2 \\ + X_2(B_2C_{c1}X_1 + B_2C_{c2}X_2) - B_{c2}C_2 = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

ここで補償器のパラメータを

$$\begin{aligned} A_{c11} &= A + B_2D_cC_2 - B_{c1}C_2 + B_2C_{c1}, \\ A_{c21} &= -B_{c2}C_2, \end{aligned}$$

と選ぶと，(62) と (63) の解は

$$X_1 = I_n, \quad X_2 = 0$$

となる．このとき，閉ループ伝達関数 T_{zw} は次式ようになる．

$$T_{zw}(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12_1} & \hat{A}_{12_2} & \hat{B}_1 \\ 0 & \hat{A}_{22_{11}} & \hat{A}_{22_{12}} & \hat{B}_{2_1} \\ 0 & \hat{A}_{22_{21}} & \hat{A}_{22_{22}} & \hat{B}_{2_2} \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{C}_{2_1} & \hat{C}_{2_2} & \hat{D} \end{array} \right] \quad (64)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= A + B_2(D_cC_2 + C_{c1}) \\ \hat{A}_{12_1} &= -B_2C_{c1} \\ \hat{A}_{12_2} &= -B_2C_{c2} \\ \hat{A}_{22_{11}} &= A + (B_2D_c - B_{c1})C_2 \\ \hat{A}_{22_{12}} &= A_{c12} - B_2C_{c2} \\ \hat{A}_{22_{21}} &= -B_{c2}C_2 \\ \hat{A}_{22_{22}} &= A_{c22} \\ \hat{B}_1 &= B_1 + B_2D_cD_{21} \\ \hat{B}_{2_1} &= B_1 + (B_2D_c - B_{c1})D_{21} \\ \hat{B}_{2_2} &= -B_{c2}D_{21} \\ \hat{C}_1 &= C_1 + D_{12}(D_cC_2 + C_{c1}) \\ \hat{C}_{2_1} &= -D_{12}C_{c1} \\ \hat{C}_{2_2} &= -D_{12}C_{c2} \\ \hat{D} &= D_{11} + D_{12}D_cD_{21} \end{aligned}$$

とする．そこで，もしも次の条件が成り立つならば，補償器は一般化プラントを内部安定化することがわかる．

$$\begin{aligned} A_{c12} &= B_2C_{c2} \quad (i.e. \hat{A}_{22_{12}} = 0) \\ A + B_2(D_cC_2 + C_{c1}) &: \text{安定} \\ A + (B_2D_c - B_{c1})C_2 &: \text{安定} \\ A_{c22} &: \text{stable.} \end{aligned}$$

したがって、安定化補償器の1つは次の形で与えられることになる。

$$K(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A + (B_2 D_c - B_{c1}) C_2 + B_2 C_{c1} & B_2 C_{c2} & B_{c1} \\ -B_{c2} C_2 & A_{c22} & B_{c2} \\ \hline C_{c1} & C_{c2} & D_c \end{array} \right]$$

ただし、 B_{c1} と C_{c1} は $A + (B_2 D_c - B_{c1}) C_2$ と $A + B_2 (D_c C_2 + C_{c1})$ が安定になるように選ばれ、 A_{c22} は任意の安定行列である。

任意の K_0 に対して、 H_0 と F_0 を

$$\begin{aligned} D_{c2} &= D_c - K_0 \\ H_0 &= B_2 D_{c2} - B_{c1} \\ F_0 &= D_{c2} C_2 + C_{c1}, \end{aligned}$$

として定義しなおすと、つぎのような安定化補償器の別表現を得ることができる。

$$K(s) = \mathcal{F}_l(\tilde{K}(s), Q(s)) \quad (65)$$

$$\tilde{K}(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_K + H_0 C_2 + B_2 F_0 & -H_0 & B_2 & \\ \hline F_0 & K_0 & I & \\ -C_2 & I & 0 & \end{array} \right] \quad (66)$$

$$Q(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{c22} & B_{c2} \\ \hline C_{c2} & D_{c2} \end{array} \right]$$

$$A_K = A + B_2 K_0 C_2$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_{c22} &: \text{安定} \\ F_0 \text{ s.t. } A_K + B_2 F_0 &: \text{安定} \\ H_0 \text{ s.t. } A_K + H_0 C_2 &: \text{安定} \end{aligned}$$

とする。

$K(s)$ は任意の $Q(s) \in RH_\infty$ に対して安定化補償器となっているので、(65) は安定化補償器のパラメトリゼーションの一表現を与えることになる。したがって、もしも (61) が一般化プラント (56) を内部安定化するならば、(61) は LFT 表現 (65) に変換できることの証明を与えたことになる。この LFT 表現は、静的出力フィードバックゲイン K_0 をゼロと選ぶと、Youla parametrization に一致する。

逆に、LFT 表現 (65) が一般化プラント (56) のすべての安定化補償器を表現していることを示そう。このためには、固定した K_0, F_0, H_0 に対して、適当に選んだ $Q(s)$ を使うことにより、すべての安定化補償器が (65) で得られることを証明すればよい。Moore の論文 [7],[8] と同様に、 $Q(s)$ を次のように選ぶ。

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} A_c & B_c C_2 & B_c \\ \hline B_2 C_c & A + B_2 D_c C_2 & -H_0 + B_2 (D_c - K_0) \\ C_c & -F_0 + (D_c - K_0) C_2 & D_c - K_0 \end{array} \right] \quad (67)$$

ただし、 A_c, B_c, C_c, D_c は設計パラメータである。このとき $\mathcal{F}_l(\tilde{K}, Q)$ はつぎのようになる。

$$\mathcal{F}_l(\tilde{K}, Q) = \left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & D_d \end{array} \right] \quad (68)$$

ただし，各行列は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
 A_d &= \begin{bmatrix} A_K + B_2 F_0 + H_0 C_2 - B_2(D_c - K_0)C_2 & B_2 C_c & \\ & -B_c C_2 & A_c \\ & H_0 C_2 - B_2(D_c - K_0)C_2 & B_2 C_c \\ & -B_2 F_0 + B_2(D_c - K_0)C_2 & \\ & B_c C_2 & \\ & A + B_2 D_c C_2 & \end{bmatrix} \\
 B_d &= \begin{bmatrix} -H_0 + B_2(D_c - K_0) \\ B_c \\ -H_0 + B_2(D_c - K_0) \end{bmatrix} \\
 C_d &= \begin{bmatrix} F_0 - (D_c - K_0)C_2 & C_c & -F_0 + (D_c - K_0)C_2 \end{bmatrix} \\
 D_d &= D_c.
 \end{aligned}$$

$A_K + B_2 F_0, A_K + H_0 C_2$ は安定行列であるので，相似変換

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & -I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

と不可制御，不可観測部分の除去により， $\mathcal{F}_l(\tilde{K}, Q)$ の最小実現がつぎのように与えられる．

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_l(\tilde{K}, Q) &= \left[\begin{array}{c|c} A_{f1} & 0 \\ A_{f2} & B_c \\ A_{f3} & -H_0 + B_2(D_c - K_0) \\ \hline C_f & D_c \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

ただし， $A_{f1}, A_{f2}, A_{f3}, C_f$ は次式とする．

$$\begin{aligned}
 A_{f1} &= \begin{bmatrix} A_K + B_2 F_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 A_{f2} &= \begin{bmatrix} -B_c C_2 & A_c & 0 \end{bmatrix} \\
 A_{f3} &= \begin{bmatrix} H_0 C_2 - B_2(D_c - K_0)C_2 & B_2 C_c & A_K + H_0 C_2 \end{bmatrix} \\
 C_f &= \begin{bmatrix} F_0 - (D_c - K)C_2 & C_c & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

したがって， $Q(s)$ を(67)のように選ぶことにより，安定化補償器は

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] \quad (69)$$

となり，閉ループ伝達関数 $\mathcal{F}_l(G, \mathcal{F}_l(\tilde{K}, Q)) = \mathcal{F}_l(G, K)$ は(58)で与えられる T_{zw} に一致することがわかる．閉ループ伝達関数 T_{zw} の A -行列 A_{clp} は $Q(s)$ の A -行列と相似であるので，閉ループ系が内部安定になるために必要十分条件は $Q(s) \in RH_\infty$ となることがわかる．これより， $Q(s) \in RH_\infty$ である(65)がすべての安定化補償器のパラメトリゼーションの1つを与えることがわかる．

特に，一般化プラントが静的出力フィードバックにより安定化可能である，つまり， A_K を安定にする出力フィードバックゲイン K_0 が存在するとき， $H_0 = 0$, $F_0 = 0$ とおくことができる．この場合には，安定化補償器のパラメトリゼーションはつぎのように簡単化される．

$$K(s) = \mathcal{F}_l(\tilde{K}_p(s), Q(s)) \quad (70)$$

$$= K_0 + Q(s)(I + C_2(sI - A_K)^{-1}B_2Q(s))^{-1} \quad (71)$$

ただし，

$$\tilde{K}_p(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_K & 0 & B_2 \\ \hline 0 & K_0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

とする．このパラメトリゼーションを静的出力フィードバックベースのパラメトリゼーションとよぶことにする．上記のパラメトリゼーションは two-stage compensator [1] とも考えられるが，我々のパラメトリゼーションは $Q(s)$ in RH_∞ の選択により，すべての安定化補償器を与える点が異なっている． $C_2 = I$, つまり状態フィードバックが可能な場合，上のパラメトリゼーションは状態フィードバックでのパラメトリゼーション [2],[3] に一致する． $K(s)$ によるフィードバック系の構造を図 23 に示す．この図から，この安定化補償器は静的出力フィードバック，内部モデルおよび自由パラメータから構成されることがわかる．

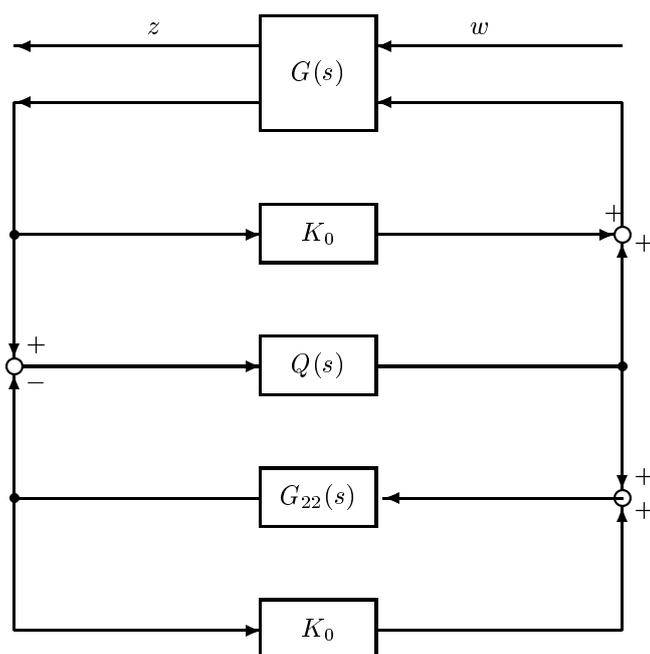


図 23: Closed-loop system with a stabilizing controller based on a static output feedback.

6 PID+Qコントローラ

6.1 PIDコントローラ

PIDコントローラは古くから各種機器に幅広く用いられてきたもっともポピュラーなコントローラである。PIDコントローラは目標値と出力との偏差の比例・積分・微分信号の和をフィードバックする方式であり、安定化やオフセットの除去、応答速度の改善、感度低減など目的としている。PIDコントローラ的设计パラメータは比例・積分・微分の3つのゲインであり、ジューゲラ・ニコルスの調整法など古典制御をベースにした設計法がある[17],[21]。近年、現代制御理論から発達したロバスト制御の立場からPIDコントローラを設計する試みがなされている[22]。これらの試みは、PIDコントローラの構造が簡単なことから、コントローラの構造をこの形に限定し、かつ、ロバスト性を満たすようなものを現代制御理論の範疇から求めようとするものである。これに対して、PIDコントローラに補助的なコントローラを付加して性能を上げようとする方法が、2自由度PID制御である[17]。PID+Qコントローラは2自由度PID制御と内部モデル制御とを一般化した構造をもっている[11]。

6.2 PID+Qコントローラの特長

PID+Qコントローラは前節の静的出力フィードバックをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーションから得られる。まず、PIDコントローラを静的出力フィードバックにおきなおすために、一般化プラントにID項を付加した拡大系を新しい一般化プラントとして、これに対して前節の安定化補償器のパラメトリゼーションを適用することにより得られる。これはPIDコントローラを中心部分とし、それに内部モデルと自由パラメータを付加した構造をもっている。自由パラメータQはプラントの不確かさを補償するように設計することができる。ここではその条件を導出する。PID+Qコントローラの特長は次のとおりである。

- PID+Qコントローラのノミナル性能はPIDコントローラのパフォーマンスと一致し、フリーパラメータQに左右されない。ゆえに、3つのPIDパラメータは良いノミナル性能を達成するために使うことができる。
- PID+Qコントローラは一型閉ループ応答を保証する全ての安定コントローラを表している。
- フリーパラメータQは摂動プラントのロバスト安定化や摂動プラントの感度関数をノミナルプラントの感度関数に近づけるために H_∞ 条件をもとに設計される。

6.3 PID+Qコントローラの構造

次のようなMIMOプラントを対象とする。

$$y(s) = G_s(s)u(s) \quad (72)$$

ただし、 $y \in R^m$, $u \in R^r$ で、プラントの伝達関数の状態空間表現は次で与えられるとする。

$$G_s(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]. \quad (73)$$

次のような多変数型のPIDコントローラを考える。

$$u(s) = -(K_P + K_I \frac{1}{s} + \frac{K_D s}{\tau s + 1})(y(s) - r(s)) \quad (74)$$

$$= -\left\{ \left(K_P + \frac{1}{\tau} K_D \right) + K_I \frac{1}{s} - \frac{1}{\tau} K_D \frac{1}{\tau s + 1} \right\} (y(s) - r(s)) \quad (75)$$

ただし, $r(s)$ は目標値, K_P, K_I, K_D は $R^{r \times m}$ なる行列ゲインとする.

ここで, PID コントローラを静的出力フィードバックに変換するために, 次のように出力を拡大する.

$$y_a(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{bmatrix} = G_p(s)y(s) \quad (76)$$

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} I_m \\ \frac{1}{s}I_m \\ \frac{1}{\tau s+1}I_m \end{bmatrix} \quad (77)$$

拡大された出力から得られた次のような1型の拡大系 $G_a(s)$ が得られる.

$$y_a(s) = G_a(s)u(s) \quad (78)$$

$$G_a(s) = G_p(s)G_s(s) \quad (79)$$

プラント $G_s(s)$ に対する PID コントローラは拡大系 $G_a(s)$ に対する静的出力フィードバックコントローラと等価であることは容易にわかる. さらに, 拡大系に外乱信号を付加してつぎのような一般化プラントを得る.

$$\begin{bmatrix} e_a(s) \\ y_a(s) \end{bmatrix} = G_{ag} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$G_{ag}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_a & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (81)$$

ただし, $e_a(s)$ は偏差信号などの制御量, $w(s)$ は目標値信号, 外乱信号, 雑音信号などの外部信号とする.

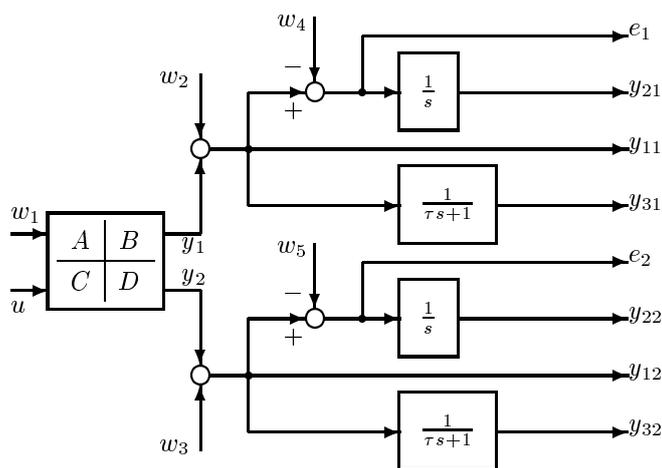


図 24: An example of generalized plant for an SIMO plant.

今, 一般化プラント $G_{ag}(s)$ は静的出力フィードバックにより安定化可能, つまり, $A_a + B_2K_0C_2$ が安定であるような出力フィードバックゲイン K_0 が存在すると仮定する. この場合, $u(s) = K_0y_a(s)$ は MIMO

プラント $G(s)$ を安定化するPIDコントローラになっていることがわかる．一般化プラント $G_{ag}(s)$ を安定化するすべてのLTIコントローラのパラメトリゼーションは次のように与えられる [11] ．

$$K(s) = \mathcal{F}_l(\tilde{K}(s), Q(s)) \quad (82)$$

$$\tilde{K}(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_K & 0 & B_2 \\ \hline 0 & K_0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

$$A_K = A_a + B_2 K_0 C_2$$

ただし， $Q(s)$ は任意の RH_∞ なる伝達関数とする．次図は，単一入出力系のPID+Qコントローラによる閉ループ系を表している．

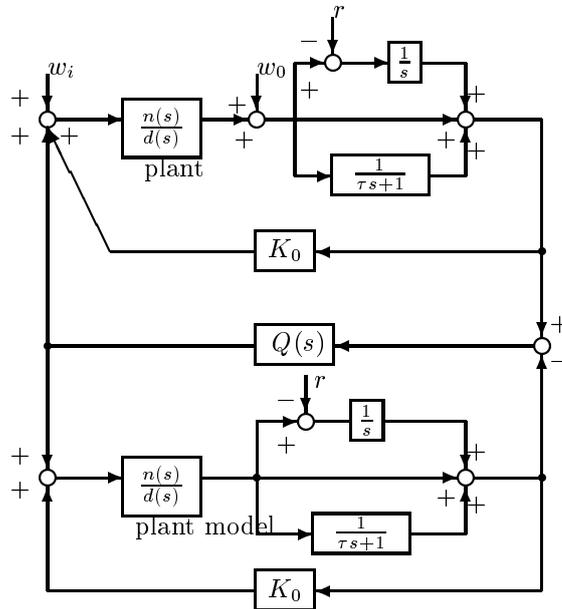


図 25: Closed-loop system of an SISO plant using PID+Q controller.

一般化プラント $G_{ag}(s)$ を安定化するすべてのコントローラを変形すると，プラント $G_s(s)$ を安定化するコントローラのパラメトリゼーションは次のようになる．

$$K_a(s) = K(s)G_p(s) \quad (83)$$

ただし， $K_a(s)$ は $Q(s) = 0$ のとき，PIDコントローラになる． $K(s)$ のLFT表現から，このコントローラは中心部分がPIDコントローラで，それに自由パラメータ項とプラントの内部モデルを付加した構造になっていることがわかる．このようなコントローラをPID+Qコントローラと呼ぶ．一般化プラントは1型であるの，PID+Qコントローラによる閉ループ系は定常位置偏差がゼロになる．PID+Qコントローラ的设计パラメータは K_0 と $Q(s)$ であり，つぎのような方針のもとに設計すればよい．

- K_0 はこれまでのPIDコントローラ設計手法を用いて，ノミナルプラントの制御性能を向上するように設計する．

- $Q(s)$ はロバスト制御系設計法を用いて、摂動プラントのロバスト安定性やロバスト性能を向上するように設計する。

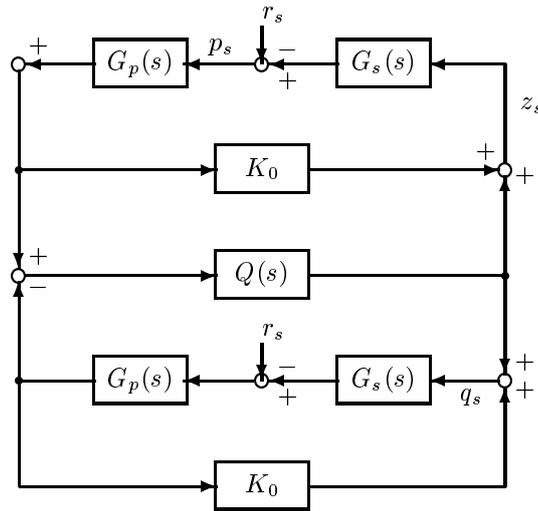


図 26: Closed-loop system with PID+Q controller.

6.4 ノミナル性能

プラントはノミナルモデルに一致する場合を考える．PID+Q コントローラの内部モデルは，図 27 のように，ノミナルプラントに一致させ，さらに目標値 r_s も印加するようにする．図 27 のように p_s, r_s, z_s, q_s を定義すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} (I - K_0 G_p(s) G_s(s))(z_s - q_s) &= 0 \\ z_s &= K_0 G_p(s) p_s + Q(s) G_p(s) G_s(s) (z_s - q_s) \\ p_s &= -r_s + G_s(s) z_s \end{aligned}$$

プラントと内部モデルの初期値が等しいとすると， $z_s = q_s$ となることから，次のように感度伝達関数が得られる．

$$p_s = -(I - G_s(s) K_0 G_p(s))^{-1} r_s \quad (84)$$

これから，PID+Q コントローラを用いたノミナルプラントの感度伝達関数はPID コントローラを用いた場合と等しいことがわかる．したがって，ノミナル性能はPID ゲイン K_0 のみに依存し，自由パラメータ $Q(s)$ には依存しないので，ロバスト制御用に設計された $Q(s)$ はノミナル性能に悪影響を与えない．

6.5 ロバスト安定性

ここでは，PID コントローラを装備したプラントのロバスト安定性を自由パラメータと内部モデルを追加することにより改善できることを示す．そこで，乗法的不確かさをもつプラントに対して，PID+Q コントローラの自由パラメータ $Q(s)$ を適切に選ぶことによりロバスト安定性向上させることを試みる．

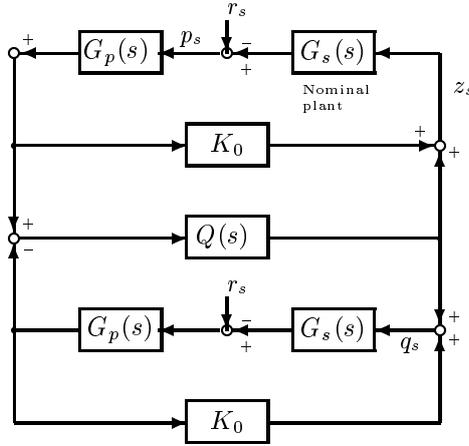


図 27: Closed-loop system of nominal plant with PID+Q controller.

乗法的不確かさをもつ次のプラント $\tilde{G}_s(s)$ を考える .

$$\tilde{G}_s(s) = G_s(s)(1 + \Delta(s)) \quad (85)$$

ただし , $G_s(s)$ は (73) で与えられ , $\Delta(s)$ は安定な乗法的不確かさであるとする . 摂動プラント $\tilde{G}_s(s)$ に対する拡大系 $\tilde{G}_a(s)$ は次のようになる .

$$\tilde{G}_a(s) = G_a(s) + G_a(s)\Delta(s) \quad (86)$$

フィードバック系の構成を図 28 に示す .

この図において信号 p, r, q, z を定義すると , 次式が成り立つ .

$$\begin{aligned} p &= Q(s)z + K_0(r + G_a(s)p) \\ q &= Q(s)z + K_0G_a(s)q \\ z &= r + G_a(s)(p - q) \end{aligned}$$

上式から r から p までの伝達関数 , $T_{pr}(s)$, は次式となる .

$$T_{pr}(s) = S_I(s)(K_0 + Q(s)S_o(s))$$

ただし ,

$$\begin{aligned} S_I(s) &= (I - K_0G_a(s))^{-1} \\ S_o(s) &= (I - G_a(s)K_0)^{-1}. \end{aligned}$$

とする . したがって , K_0 がノミナルプラント $G_a(s)$ を安定化しているならば , 図 28 の閉ループ系の安定性は図 29 と等価になる . 小ゲイン定理から

$$\|(T_1(s) + T_2(s)Q(s)T_3(s))\Delta(s)\|_\infty < 1, \quad (87)$$

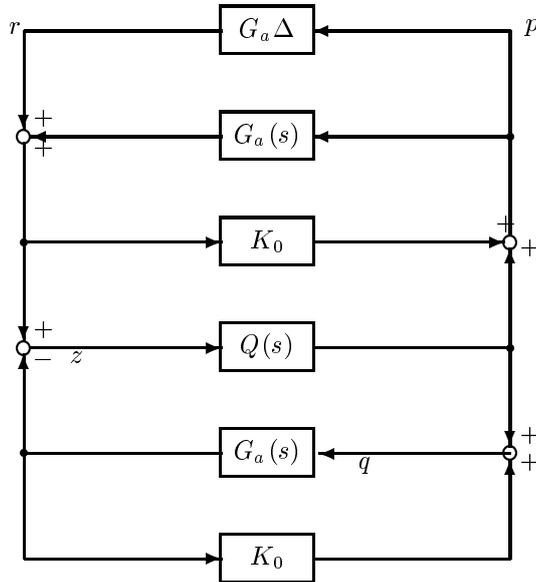


図 28: Closed-loop system with multiplicative uncertainty.

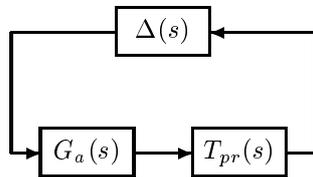


図 29: Collapsed block diagram.

が成り立つならば，閉ループ系は安定であることがわかる．ただし，

$$T_1(s) = (I - K_0 G_a(s))^{-1} K_0 G_a(s)$$

$$T_2(s) = (I - K_0 G_a(s))^{-1}$$

$$T_3(s) = G_a (I - K_0 G_a(s))^{-1}.$$

とする．ここで，乗法的不確かさは

$$|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \quad 0 \leq \omega \leq \infty.$$

を満足すると仮定すると (87) はつぎのような古典的な H_∞ 問題におけるモデルマッチング問題に帰着される．

$$\|(T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s))W(s)\|_\infty < 1 \quad (88)$$

特に， $Q = Q_0 K_0$ とおき， $T_1(s) = K_0 T_3(s)$ に注意すると，この条件は次のように書き直すことができる．

$$T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s)$$

これからつぎのようなノミナル性能回復問題が定式化される。
指定された γ と $V(s)$ に対して、次の不等式が満足するような $Q(s)$ を見つけよ。

$$\|(I - V(s)Q(s)T_3(s))W(s)W_2(s)\|_\infty < \gamma \quad (92)$$

ここで、 $W_2(s)$ は適当な周波数重み関数である。設計パラメータである $V(s)$ と $W_2(s)$ は目的の周波数帯で 1 に近いように選ぶ必要がある。この条件 (92) をノミナル性能回復条件と呼ぶことにする。ノミナル性能回復とは、摂動プラントに対して劣化したコントローラの性能をノミナルプラントの場合と同じ程度に引き上げるといった意味がある。

7 PD+Qコントローラによるクレーンリフタの制振制御

7.1 PID+Qコントローラの適用概要

ビデオトラッカーとは応用計測研究所の開発した光学計測装置の1つである。2つのマーカーの動きを白黒のカメラの映像データを閾値の任意設定により2値化処理し、対象物の位置座標および面積を検出しながら自動的に追跡し、60[Hz]のデジタル信号としてパソコンにRS232Cを介して出力するものである。リフターは小型のクレーンに人を搬送するためのワイヤと吊り具をとりつけた装置である。リフターは福祉機器や工業プラントに多く用いられており、搬送物の振れ止め制御が1つの課題となっている。振れ止め制御を実現するためには、ワイヤの揺れを精度よく検出する必要がある。ワイヤは取り付け部から揺れるので、エンコーダなどで検出することは難しいため、ビデオトラッカーによる光学計測を用いる。大山らは、ビデオトラッカーを用いた倒立振子の安定化制御をLQG制御とむだ時間補償器により達成している[44]。この論文で大山らは、ビデオトラッカーには画像処理とRS232Cによるデータ転送のために、 $\frac{1}{30}$ 秒程度の時間遅れが存在し、これを補償しなければ制御が難しいと指摘している。そこで、我々は大山らのビデオトラッカーを用いた倒立振子制御系をリフター振れ止め制御系に見たてて、低次元化したPID+Qコントローラを実装し、その有効性の検証を開始した[13]。この際、つぎの問題点が指摘された。

- (1) PIDコントローラを設計し、さらに自由パラメータを設計することのメリット。
- (2) 剛体である棒をワイヤの代りに使ったこと。
- (3) ワイヤ長さに対するロバスト性が検討されていないこと。
- (4) カメラ取り付け場所がリフターから独立していること。

今回は、これらの指摘に対して、次のような改善を試みた結果を報告する。

- (1) 低次元PID+Qコントローラを1)PID+Qコントローラ全体を低次元化したもの、2)PIDコントローラはそのまま内部モデルと自由パラメータ部分を低次元化したものの2種類設計し、PIDコントローラとロバスト性の比較をシミュレーションにより行う。
- (2) 棒をワイヤに取り替えて実験を行う。
- (3) ワイヤ長さを換えて実験を行う。

なお、カメラを台車部分に取り付けることは実験装置の構造上不可能であるので、実施していない。

PID+Qコントローラ的设计パラメータは K_0 と $Q(s)$ であり、つぎのような方針のもとに設計する。

- K_0 はこれまでのPIDコントローラ設計手法を用いて、ノミナルプラントの制御性能を向上するように設計する。
- $Q(s)$ はロバスト制御系設計法を用いて、摂動プラントのロバスト安定性やロバスト性能を向上するように設計する。

1. 第1ロバスト安定条件: もしモデルマッチング条件

$$\|(T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s))W(s)\|_\infty < 1 \quad (93)$$

が、ある $Q(s) \in RH_\infty$ に対して満足されるならば、すべての $\Delta(s)$ に対して、閉ループ系は安定になる。ただし、

$$\begin{aligned} T_1(s) &= (I - K_0G_a(s))^{-1}K_0G_a(s) \\ T_2(s) &= (I - K_0G_a(s))^{-1} \\ T_3(s) &= G_a(I - K_0G_a(s))^{-1}. \end{aligned}$$

とする。

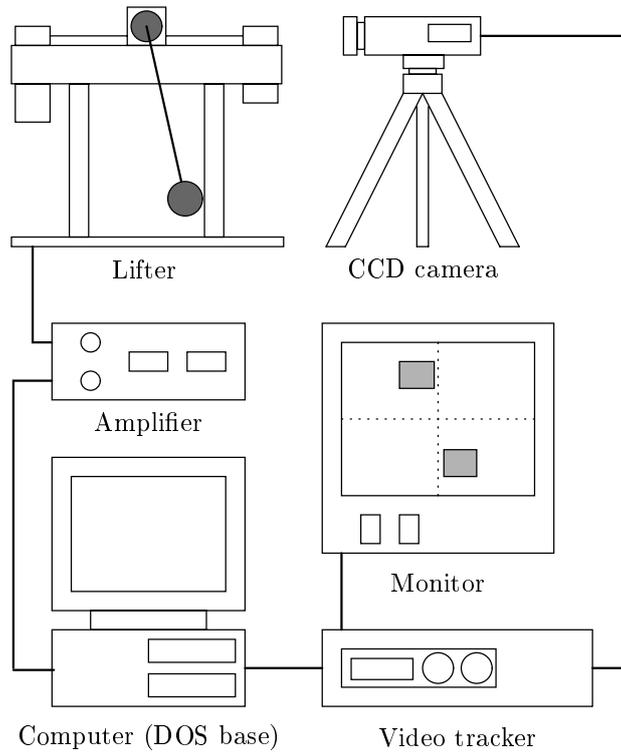


図 31: Experimental system configuration.

アルフィードバックによる倒立振り子制御系を設計した。一方，我々は，振り棒の代わりに先端に錘を取り付けたワイヤを吊り下げ，2つのマーカーをリフター根元位置とワイヤ先端の錘に取り付けた。安定平衡点のまわりでこの装置を制御することにより，リフターの制振制御系を模擬することができる。この実験装置の非線形モデルで，

$$\begin{aligned}
 M & : 0.64[\text{kg}]; & m & : 0.045[\text{kg}]; \\
 l & : 0.32[\text{m}]; & a & : 0.98[\text{N/V}]; \\
 c_1 & : 9.8[\text{Nsec/m}]; & c_2 & : 3.58 \times 10^{-4}[\text{Nmsec/rad}]; \\
 g & : 9.8[\text{m/sec}^2]
 \end{aligned}$$

とし，安定平衡点 $(x_1, x_2) = (0, \pi)$ の周りで近似線形化した線形状態方程式の A 行列， B 行列， C 行列は次式で与えられる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.7408 \times 10^1 & 0 & -8.1831 \times 10^{-2} & -4.1326 \times 10^1 \\ -3.4977 \times 10^{-1} & 0 & -1.5097 \times 10^{-3} & -1.5069 \times 10^1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.1326 \\ 1.5069 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

そこでまず、ベースとなるPDコントローラを設計する。PIDコントローラでなくPDコントローラを用いたのは以下の理由による。

- この場合、理想的な微分器が使用可能であるならば、PDコントローラは状態フィードバックコントローラで与えられ、フィードバックゲインはLQ制御理論を用いて計算できる。
- PDコントローラは多くのメカニカルシステムに用いられている。
- 設計計算の結果から、PIDコントローラをベースにしてPID+Qコントローラを設計した場合、PD+Qコントローラと同等の低次元コントローラをえることができなかった。

LQ制御よりLQフィードバックゲイン K_q を求めると次のようになる。

$$K_q = \begin{bmatrix} -4.5985 \times 10^1 & 4.2823 \times 10^1 & -4.3019 \times 10^1 & 3.7837 \times 10^1 \end{bmatrix},$$

ただし、評価関数を次のようにおいている。

$$J = \int_0^{\infty} (x^T \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} x + 10u^2) dt$$

LQゲイン K_q をPDゲインとして採用すると、このPDコントローラは上記の線形モデルを安定化できる。この場合の A_K の固有値はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} & -9.7162 \times 10^1, \quad -1.0000 \times 10^2, \quad -1.6436 \times 10^1 \\ & -5.1352 \times 10^{-1} \pm j4.9340 \times 10^0, \quad -5.2557 \times 10^{-1}. \end{aligned}$$

外部入力 w_1, w_2, w_3 をもつ一般化プラントを図32のようにおく。ただし、 w_i, z_i , and y_i はつぎのように定義されている。

- w_1 : an input disturbance;
- w_2, w_3 : set point values;
- z_1, z_2 : controlled signals;
- y_1, y_2, y_3, y_4 : augmented outputs.

7.5 シミュレーション結果

We try to design two controllers using the MATLAB LMI toolbox. One is a robust stabilizer derived from the robust stability condition, the other is a controller with better robust performance than the PD controller derived from the nominal performance recovery condition. The time-constant of the D controller τ is equal to 0.01 [sec]. Setting the frequency weight $W_1(s)$ as

$$W_1(s) = \frac{2.1Ls}{Ls + 1}, \quad L = 0.005,$$

we get a robust stabilizer with 15th order by solving both of the robust stability conditions. However, we cannot get a stable free parameter $Q(s)$ since each of the free parameters has a zero pole.

Therefore, we pay attention to the nominal performance recovery condition. Setting the same frequency weight $W_1(s)$ as the robust stabilizer, and $W_2(s) = \frac{100}{s+100}, V(s) = 1$ and $\gamma = 1$, we get a stable

図 32: Generalized plant.

free parameter with the following poles:

$$\begin{aligned} & -2.0000 \times 10^3, \quad -1.9304 \times 10^2, \quad -9.8664 \times 10^1 \\ & -1.0000 \times 10^2, \quad -9.1983 \times 10^0 \pm j4.9061 \times 10^0, \quad -2.7925 \times 10^{-1} \pm j4.9093 \times 10^0. \end{aligned}$$

重みの選び方の説明 Since the obtained PD+Q controller is of 15th order, the controller is needed to reduce its order for applying to the experimental equipment. The balanced model reduction method is used to get a reduced-order PD+Q controller. Using MATLAB functions *balmr.m* and *schmr.m*, we can find the 3rd order controller that stabilizes the closed-loop system. The reasons why we select 3rd order controller are as follows:

- PID と比べて , 次数があまりおおきくならないように .
- Pentium 166MHz MS-DOS ベースリアルタイム制御系として実行可能な範囲

The obtained reduced-order continuous-time controller is described as

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c z(t) + D_c y(t) \\ A_c &= \begin{bmatrix} -1.5681 \times 10^1 & -5.2971 \times 10^1 & -1.5632 \times 10^1 \\ 2.0920 \times 10^2 & -8.1944 \times 10^1 & 4.6990 \times 10^0 \\ 1.0435 \times 10^2 & 2.4616 \times 10^1 & -1.1585 \times 10^1 \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} -6.3569 \times 10^0 & -8.7319 \times 10^0 \\ -8.2948 \times 10^1 & -8.4283 \times 10^1 \\ 2.4771 \times 10^2 & 1.9455 \times 10^2 \end{bmatrix} \\ C_c &= \begin{bmatrix} -1.8848 \times 10^1 & -2.1630 \times 10^1 & 9.2400 \times 10^0 \end{bmatrix} \\ D_c &= \begin{bmatrix} -4.5985 \times 10^1 & -4.3019 \times 10^1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

The bilinear transform is used to discretize the continuous-time controller. This transform can be computed by using the MATLAB function *bilin.m* that computes several state-space bilinear transformations

such as Tustin, prewarped Tustin, etc. Selecting the Tustin transform and the same sampling time $T_s = \frac{1}{60}[\text{sec}]$ as that of the Video Tracker, we get the following reduced-order digital controller:

$$\begin{aligned}
 z[k+1] &= A_d z[k] + B_d y[k] \\
 u[k] &= C_d z[k] + D_d y[k] \\
 A_d &= \begin{bmatrix} 5.9410 \times 10^{-1} & -6.7852 \times 10^{-1} & -2.1361 \times 10^{-1} \\ 4.8021 \times 10^{-2} & 2.2209 \times 10^{-1} & 3.7937 \times 10^{-2} \\ 1.3541 \times 10^0 & 1.7481 \times 10^0 & 7.2548 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \\
 B_d &= \begin{bmatrix} -6.7654 \times 10^0 & 1.7104 \times 10^0 \\ -9.2278 \times 10^1 & -9.6041 \times 10^1 \\ 2.7381 \times 10^2 & 1.7653 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 C_d &= \begin{bmatrix} -7.7388 \times 10^{-2} & 1.0446 \times 10^{-2} & 7.9787 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
 D_d &= \begin{bmatrix} -2.6595 \times 10^1 & -2.7701 \times 10^1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Assuming that the system is perturbed such that

$$\begin{aligned}
 \text{wire length } l &= 1 + 0.8 \sin 5t, \\
 \text{time delay } L &= 0.391,
 \end{aligned}$$

we simulate the closed-loop responses of the nonlinear equation (95) with the following two controllers:

- PD controller ; $Q(s) = 0$
- full-order PD+Q controller (14th order)
- reduced-order PD+Q controller (3rd order) ; the nominal performance recovery condition

where $x_1(0) = 1$ and $x_2(0) = 0$.

Figures 33, and 34 are the Bode gain diagrams of the PD controller, and the reduced-order continuous-time PD+Q controller, respectively. In each figure, the solid line shows the gain diagram of the transfer function from the angle to the input voltage, and the dotted line shows of the transfer function from the position to the input voltage. ボード線図の違いを説明せよ .

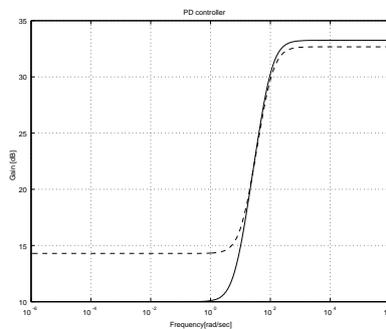


図 33: Bode gain diagram of PD controller.

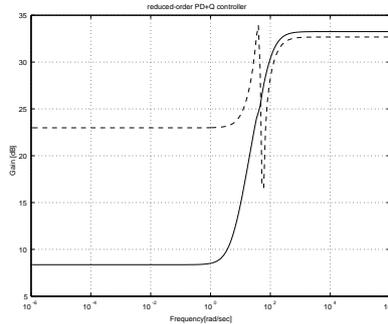


図 34: Bode gain diagram of reduced-order continuous-time PD+Q controller.

Figures 35 and 36 show the angle responses and the position responses for the full-order continuous-time PD+Q controller, and the reduced-order digital PD+Q controller, respectively. ***シミュレーションの説明追加すべし***

あたらしく, シミュレーション追加すべし

comparison PD+Q control between PD control with time delay

comparison PD+Q control between PD control without time delay

Our PD+Q controller is much more robust to the time delay and the variation in the wire length than the PD controller.

さらに, PID+Qを設計して, シミュレーションすること. 結果の考察.

7.6 実験結果

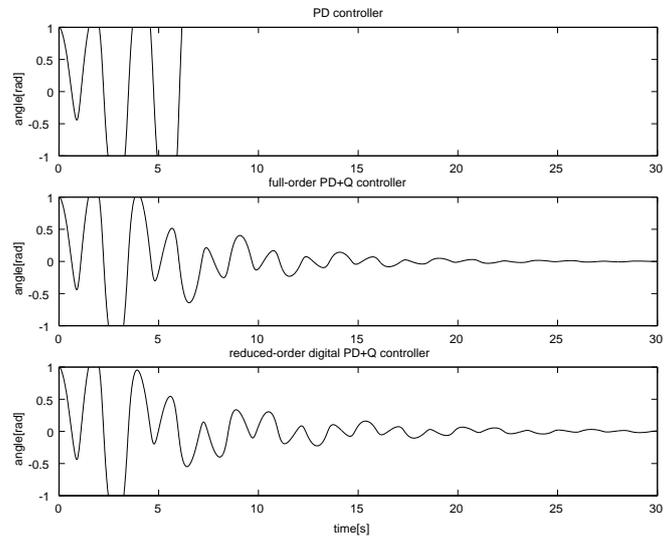
In the experiment, the rigid pendulum is replaced with a flexible wire, the sampling period is $1/60$ [sec], and the RS232C transfer rate is 19200 [bps]. Since the experimental equipment cannot winch the wire, we use three wires with fixed length. (構造上の問題であることを強調する) Each wire is 10[cm], 20[cm], and 30[cm] long. Figure 38 shows the responses of the tip angles without controller, with the PD controller, and with the reduced-order digital controller when the wire length is 10[cm]. Figures 39 and 40 show the responses of the tip angles when the wire length is 20[cm] and 30[cm], respectively. The PD+Q controller has the advantage of the robust performance to the wire length.

実験結果の説明

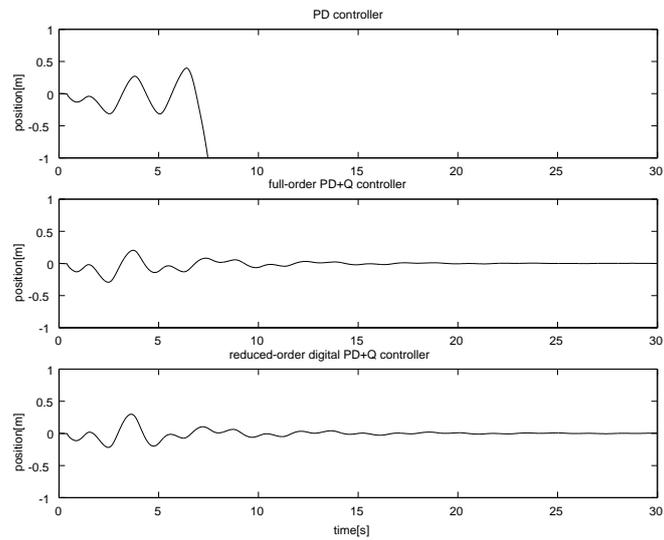
長さを可変にできない理由

オフセットの残っている理由など.

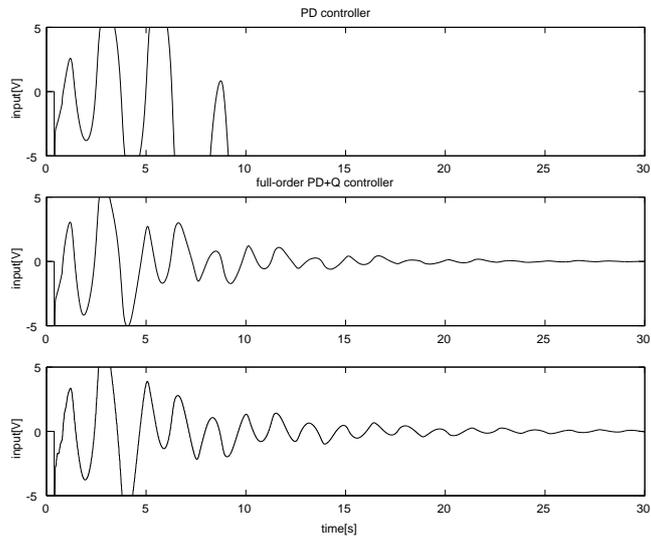
PID+Qの優位性



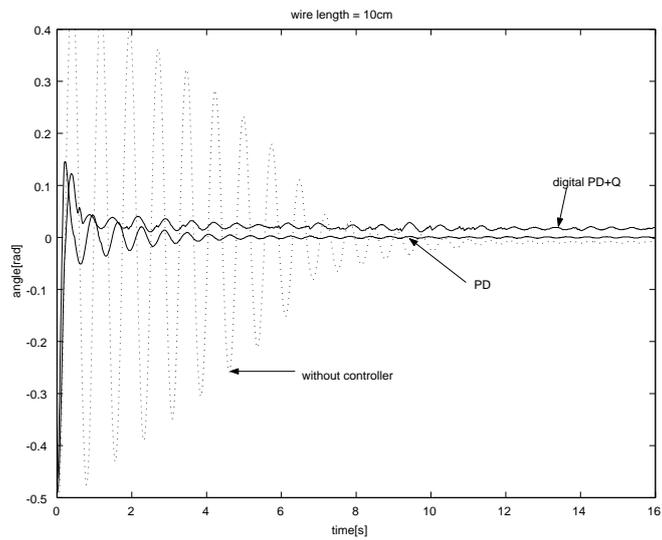
☒ 35: Angles of wire with PD controller and with full-order continuous-time PD+Q controller, and with reduced-order digital PD+Q controller.



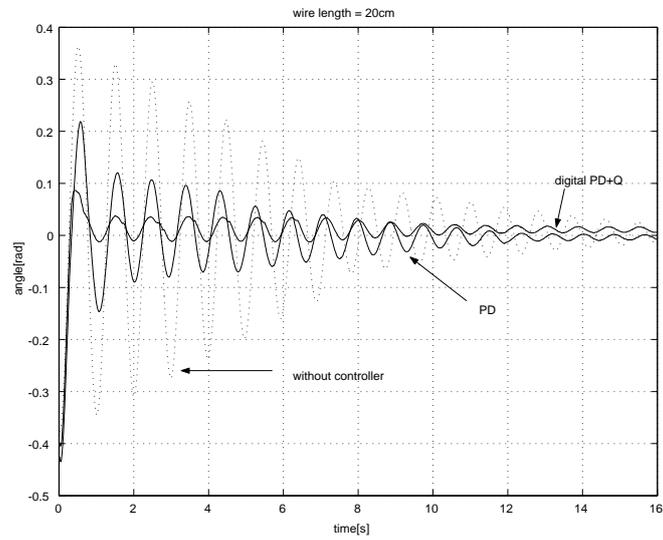
☒ 36: Positions of cart with PD controller and with full-order continuous-time PD+Q controller, and with reduced-order digital PD+Q controller.



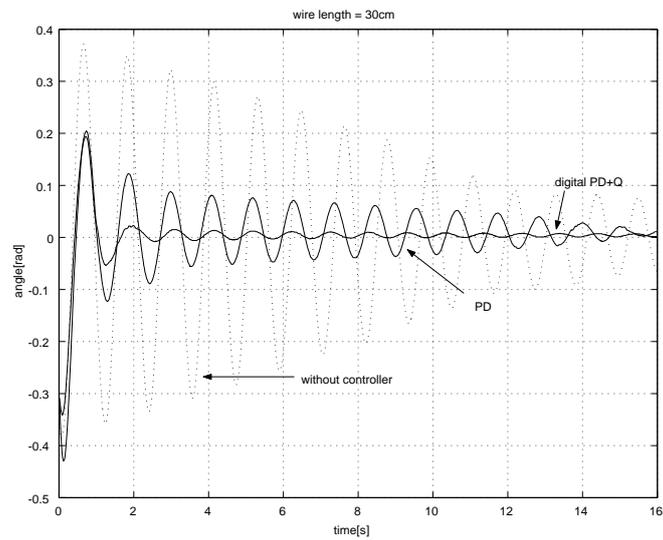
☒ 37: Inputs with PD controller and with full-order continuous-time PD+Q controller, and with reduced-order digital PD+Q controller.



☒ 38: Tip angles without controller, with the PD controller and with PD+Q controller when the wire length is 10 cm.



☒ 39: Tip angles of wire without controller, with the PD controller and with PD+Q controller when the wire length is 20 cm.



☒ 40: Tip angles of wire without controller, with the PD controller and with PD+Q controller when the wire length is 30 cm.

8 PD+Qコントローラによるロボットマニピュレータのロバスト位置制御

8.1 モデルの記述

We design a PD+Q controller – a kind of the PID+Q controller – to stabilization of a parallel-link-robot manipulator as an example of MIMO nonlinear mechanical systems. We adopt the model of the two-parallel-link manipulator given by Namerikawa *et al.* [38]. The dynamic model of the manipulator-plus-actuator is obtained as follows:

$$\begin{aligned}
 M(q)\ddot{q} + D(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) &= \alpha f(v) \\
 M(q) &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, D(q) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \\
 f(v) &= \begin{bmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{bmatrix}, g(q) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \\
 q &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{96}$$

where q_i is the i -th link angle, v_i is the control voltage of the i -th actuator and $f(v)$ represents the actuator nonlinearities. We adopt the physical parameters of the two-parallel-link manipulator as in Table 1[38] and the following nominal plant model:

$$\begin{aligned}
 M_0\ddot{q} + D_0\dot{q} &= \alpha v \\
 M_0 &= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}, D_0 = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{97}$$

We take an internal model as the above nominal plant model.

表 1: Parameters of two-parallel link manipulator

m_{11}	3.68×10^{-3}
m_{22}	2.99×10^{-3}
m_{12}	$-8.22 \times 10^{-5} \cos(q_2 - q_1)$
m_{21}	$-8.22 \times 10^{-5} \cos(q_2 - q_1)$
d_{11}	9.25×10^{-3}
d_{22}	9.25×10^{-3}
d_{12}	$8.22 \times 10^{-5} \dot{q}_2 \sin(q_2 - q_1)$
d_{21}	$-8.22 \times 10^{-5} \dot{q}_1 \sin(q_2 - q_1)$
g_1	$4.64 \times 10^{-2} \cos q_1$
g_2	$-1.88 \times 10^{-3} \cos q_2$
α	6.89×10^{-2}

8.2 PDコントローラ

Supposing that the target position q_d is given and considering a setpoint control problem in which the posture of the robot manipulator is allowed to approach asymptotically the target state $(q, \dot{q}) = (q_d, 0)$ from any initial state [36], we use the central controller as the PD controller without the nonlinear compensation as follows:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\alpha} \{-K_v \dot{q} + K_p(q_d - q)\} \\ K_v &= \text{diag}\{3 \times 10^2, 3 \times 10^2\}, \\ K_p &= \text{diag}\{1 \times 10^4, 1 \times 10^4\} \end{aligned} \quad (98)$$

The high gain PD feedback is robust for the parameter uncertainties such as δM , δD and δg , but not for the input nonlinearities. Therefore, we design the PD+Q controller to stabilize the perturbed systems for the following cases:

- Case 1 : first-order modeling error such as ignored motor dynamics,
- Case 2 : first-order low-pass filter in D-term,
- Case 3 : input nonlinearities such as backlash or saturation.

We can get the solution $Q(s)$ using MATLAB LMI toolbox after converting (88) to the generalized plant and checking whether the free parameter $Q(s)$ is stable or not. Figure 5 shows the feedback configuration of the manipulator with PD+Q controller via SIMULINK where the signals are defined as

$$\begin{aligned} q_{d1}, q_{d2} &: \text{target-position signals} \\ e_1, e_2 &: \text{error signals} \\ q_1, q_2, q'_1, q'_2 &: \text{augmented outputs} \\ v_1, v_2 &: \text{control input.} \end{aligned}$$

Through the simulation, we found out that our PD+Q controller is effective except for Case 3. In the next subsection, we will show the simulation results in Cases 1 and 2.

8.3 シミュレーション結果

PD Controller

Defining $y(t)$ as

$$y(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q'_1(t) \\ q'_2(t) \end{bmatrix},$$

the PD controller is obtained from (98) as

$$\begin{aligned} v_0(t) &= K_0 y(t) \\ K_0 &= 10^5 \begin{bmatrix} -1.4522 & 0 & -0.0436 & 0 \\ 0 & -1.4522 & 0 & -0.0436 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

The First Robust Stability Condition

The first robust stability condition (FRSC) is expressed in the following form:

$$\|(T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s))\gamma^{-1}W(s)\|_\infty < 1$$

The design parameters γ , $W_1(s)$ and L are selected as

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 \\ W_1(s) &= \begin{bmatrix} 10^{-5} \frac{2.1Ls}{Ls+1} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \frac{2.1Ls}{Ls+1} \end{bmatrix} \\ L &= 0.0001\end{aligned}$$

Since the obtained PD+Q controller is of 10th order and the free parameter is of 6th order, the controller is needed to reduce its order for applying to the experimental equipment. The balanced model reduction method is used to get a reduced-order PD+Q controller. Using the MATLAB function *balmr.m*, we can find a PD+Q controller with a 2nd order free parameter that stabilizes the closed-loop system. The resultant reduced-order free parameter is described as

$$\begin{aligned}Q(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right] \\ \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c (\hat{y}(t) - y(t)) \\ v_1(t) &= C_c z(t) + D_c (\hat{y}(t) - y(t)) \\ A_c &= \begin{bmatrix} -1.2738 \times 10^4 & 0 \\ 0 & -1.2759 \times 10^4 \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} 3.5964 \times 10^3 & 0 \\ 0 & -3.6011 \\ -2.5195 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 2.5175 \end{bmatrix} \\ C_c &= \begin{bmatrix} -4.3911 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 4.3938 \times 10^3 \end{bmatrix} \\ D_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

where $\hat{y}(t)$ is the output of an internal model in the PD+Q controller. The output of the obtained PD+Q controller $v(t)$ is given by

$$v(t) = v_0(t) + v_1(t)$$

Adding a free parameter and an internal model to an established PD controller operating a plant attains the implementation of a PD+Q controller since the PD+Q controller can be constructed as the sum of a PD controller and a robust compensator as in the above equation.

THE SECOND ROBUST STABILITY CONDITION

The second robust stability condition (SRSC) is expressed in the following form:

$$\|(I - T_2(s)Q_0(s))\gamma^{-1}W(s)\|_\infty < 1$$

The design parameters γ , $W_1(s)$ and L are selected as

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 \\ W_1(s) &= \begin{bmatrix} 10^{-5} \frac{2.1Ls}{Ls+1} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \frac{s}{0.1s+1} \end{bmatrix} \\ L &= 0.0001\end{aligned}$$

The resultant reduced-order free parameter is described as

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c K_0 (\hat{y}(t) - y(t)) \\ v_1(t) &= C_c z(t) + D_c K_0 (\hat{y}(t) - y(t)) \\ A_c &= \begin{bmatrix} -0.1253 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & -0.0512 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} 0 & -191.8747 \\ 106.0135 & 0 \end{bmatrix} \\ C_c &= \begin{bmatrix} 0 & -106.0135 \\ 191.8747 & 0 \end{bmatrix} \\ D_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

PERTURBED PLANTS

- Case 1: each of modeling errors of the actuators is assumed to be $\frac{1}{0.05s+1}$. The SIMULINK configuration of the perturbed plant is shown in Figure 42.
- Case 2: each of D-terms with the first-order low-pass filters is assumed to be $\frac{s}{0.1s+1}$. The SIMULINK configuration of the perturbed plant is shown in Figure 43.

CLOSED-LOOP RESPONSES

The list of the figures of the error responses $e_1(t) = q_1 - q_{d1}$ and $e_2(t) = q_2 - q_{d2}$ in Case 1 and Case 2 is in Table 2 when each of the controllers with FRSC and SRSC is implemented. In these simulations, it is assumed that the initial conditions are

$$q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = q_4(0) = 0$$

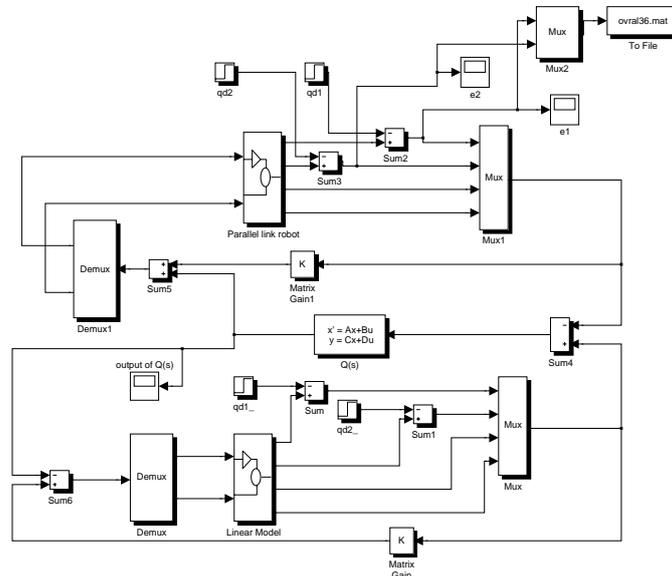
and the setpoint values of q_1 and q_2 are

$$q_{d1} = 2, \quad q_{d2} = 1.$$

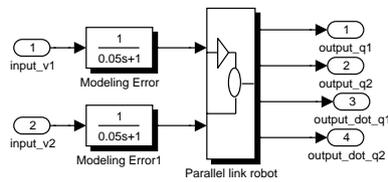
We can see from the simulation results that the PD+Q controller becomes more useful method for robust stabilizer design.

表 2: List of figures.

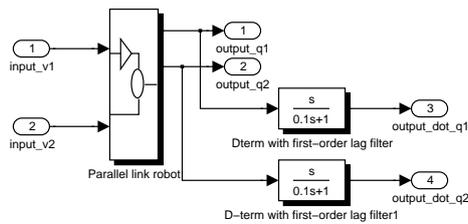
Perturbed plants	FRSC	SRSC
Case 1	☒ 44	☒ 45
Case 2	☒ 46	☒ 47



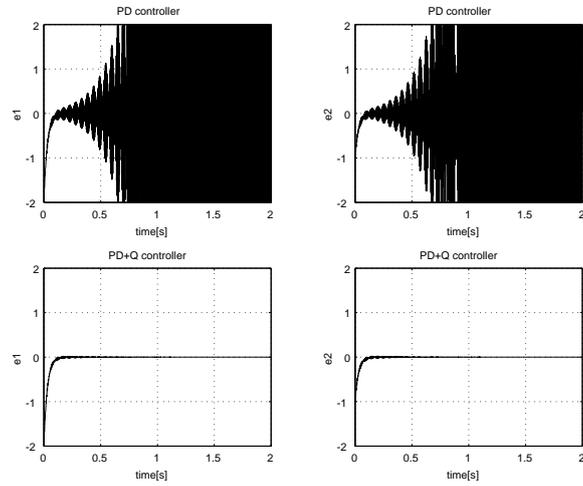
☒ 41: System configuration of the robot manipulator with PD+Q controller via SIMULINK.



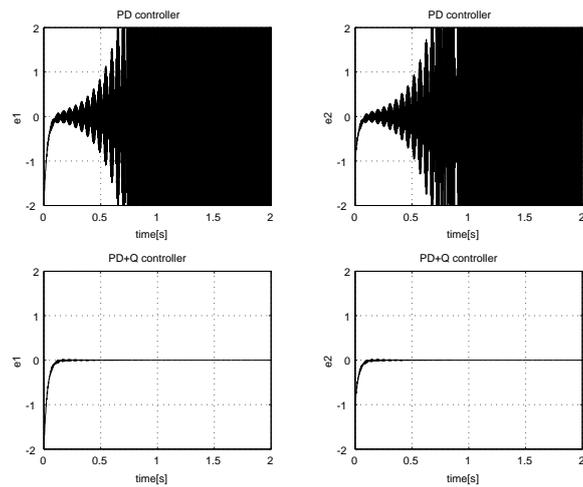
☒ 42: Perturbed plant in Case 1 via SIMULINK.



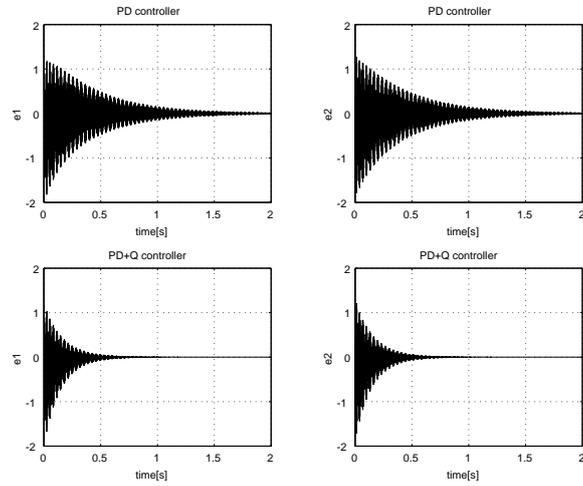
☒ 43: Perturbed plant in Case 2 via SIMULINK.



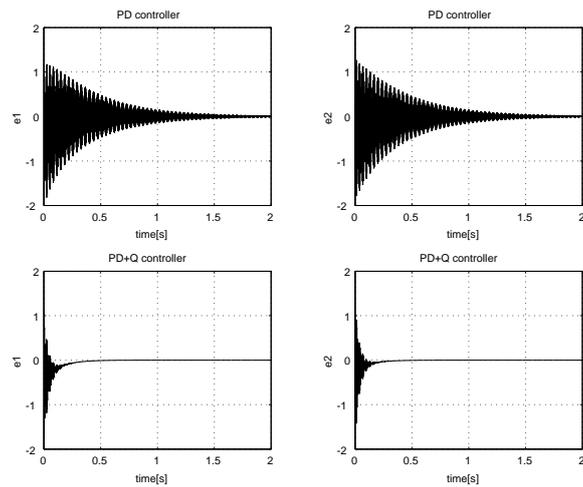
⊠ 44: Error responses e_1 (top left) and e_2 (top right) in Case 1 by PD controller, and e_1 (bottom left) and e_2 (bottom right) in Case 1 by PD+Q controller using FRSC.



⊠ 45: Error responses e_1 (top left) and e_2 (top right) in Case 1 by PD controller, and e_1 (bottom left) and e_2 (bottom right) in Case 1 by PD+Q controller using SRSC.



⊠ 46: Error responses e_1 (top left) and e_2 (top right) in Case 2 by PD controller, and e_1 (bottom left) and e_2 (bottom right) in Case 2 by PD+Q controller using FRSC.



⊠ 47: Error responses e_1 (top left) and e_2 (top right) in Case 2 by PD controller, and e_1 (bottom left) and e_2 (bottom right) in Case 2 by PD+Q controller using SRSC

9 あとがき

本レポートは、我々のこれまでのPID+Qコントローラの研究を概説したものである。まず、静的出力フィードバックをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーションを状態空間表現のみから導いた。次いで、これをもとにPIDコントローラをベースにした安定化補償器のパラメトリゼーションを求めた。このパラメトリゼーションは中心部分のPIDコントローラにプラントの内部モデルと自由パラメータを付加した構造をもっており、PID+Qコントローラと名づけられた。さらにPID+Qコントローラは、つぎのような特性を持っていることを明らかにした。

- PID+Qコントローラのノミナル性能はPIDコントローラの性能と一致し、フリーパラメータQに左右されない。ゆえに、3つのPIDパラメータは良いノミナル性能を達成するために使うことができる。
- PID+Qコントローラは一型閉ループ応答を保証する全ての安定コントローラを表している。
- フリーパラメータQは摂動プラントのロバスト安定化や摂動プラントの感度関数をノミナルプラントの感度関数に近づけるために H_∞ 条件をもとに設計される。

そこで、自由パラメータ $Q(s)$ を設計するために、つぎのような条件を導出した。

- ロバスト安定性：第1ロバスト安定条件，第2ロバスト安定条件
- ロバスト性能：ノミナル性能回復条件

参考文献

- [1] Vidyasagar, M., *Control System Synthesis, A Factorization Approach*. The MIT Press, (1985).
- [2] Rotea, M. A. and P. P. Khargonekar, H^2 -optimal Control with an H^∞ -constraint : The State Feedback Case. *Automatica*, **27-2**, 307-316, (1991).
- [3] Zhou, K., On the Parametrization of H_∞ Controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-37-9**, 1442-1446, (1992).
- [4] Doyle, J. C., K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis, State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-34-8**, 831-846 (1989).
- [5] Gu, D.-W., B. W. Choi and I. Postlethwaite, Low-Order Stabilizing Controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-38-1**, 1713-1717, (1993).
- [6] Mita, T. and Z.Hui, Youla Parametrization without Using Coprime Factorization. *Trans. of the Instrument and Control Engineers*, **31-4**, 540-541, (1995). (*in Japanese*)
- [7] Moore, J. B., T.T. Tay, Left Coprime Factorization and a Class of Stabilizing Controllers for Non-linear Systems. *International Journal of Control*, **49-4**, 1235-1248, (1989).
- [8] Moore, J. B., K. Glover and A. Telford, All Stabilizing Controllers as Frequency-Shaped State Estimate Feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-35-2**, 203-208, (1990).
- [9] Matsuo T. and K. Nakano, A Parametrization of All Stabilizing Compensators with a Static Output Feedback in the Central Part and Its Application to PID controller. *Preprints of 13th IFAC World Congress, vol.C*, 229-234 (1996).

- [10] Matsuo T. and K. Nakano, "Robust Control of Multivariable Systems by PID+Q Controller", *Proceedings of American Control Conference*, 3674-3678 (1997).
- [11] Matsuo T. and K. Nakano, "Robust Stabilization of Closed-Loop Systems by PID+Q Controller", *International Journal of Control*, 70-4, 631-650 (1998).
- [12] Matsuo T., H. Suemitsu and S. Fujiwara, "Robust Stability and Robust Performance of PID+Q Controller and Its Application to a Robot Manipulator", *Proc. of 1998 International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications*, Sokcho, KOREA(1998).
- [13] Matsuo T., R. Yoshino and H. Suemitsu, "Robust Anti-Sway Control of Crane Lifter with Visual Measurement by PID+Q Controller ", *Proc. of IMEKO World Congress 1999*, Osaka, Vol.X, 41-48 (1999).
- [14] Takami Matsuo, Shuuichi Fujiwara, Ryoichi Yoshino, Haruo Suemitsu, "Robust Stability and Robust Performance Conditions for Robot Manipulators by PD+Q Controller", *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, Tokyo, II-872-II-877 (1999)
- [15] Matsuo T., R. Yoshino, H. Suemitsu, and K. Nakano, "Nominal Performance Recovery by PID+Q Controller and Its Application to Anti-Sway Control of Crane Lifter with Visual Feedback ", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, to be submitted.
- [16] 相良節夫：基礎自動制御，森北出版（1978）.
- [17] 須田信英他：PID制御，朝倉書店（1992）.
- [18] 須田信英：制御工学，コロナ社（1987）.
- [19] 須田信英：エース自動制御，朝倉書店（2000）.
- [20] 荒木光彦：古典制御理論[基礎編]，培風館（2000）.
- [21] 山本，加藤：PID制御の基礎と応用，朝倉書店（1997）.
- [22] 佐伯正美：現代制御理論とPID制御のかかわり合い，計測と制御，37-8，578-585（1998）.
- [23] 相良，和田，中野：デジタル制御の基礎，コロナ社（1992）.
- [24] 宮崎ら：パソコンで学ぶ自動制御の実用学，CQ出版社（1991）.
- [25] 宮崎ら：パソコンで学ぶ自動制御の応用学，CQ出版社（1992）.
- [26] 川越 靖：数値解析ソフトウェアMATLABの制御システムへの応用，インターフェイス，1994年9月号，CQ出版社.
- [27] 川越 靖：MATLABによる制御系シミュレーション，インターフェイス，1995年5月号，CQ出版社.
- [28] M. Zhuang and D.P. Atherton, "Automatic tuning of optimum PID controllers", *IEE proceedings-D*, 140-3, 216-224 (1993).
- [29] W.K. Ho, C.C. Hang and L.S. Cao, "Tuning of PID Controllers Based on Gain and Phase Margin Specifications", *Automatica*, 31-3, 497-502 (1995).

- [30] B. Porter, "Genetic Design of Control Systems", 計測と制御, 34-5, 393-402 (1995).
- [31] Musch, H. E. and M. Steiner (1995), "Robust PID Control for an Industrial Distillation Column", *IEEE Control Systems Magazine*, **August 1995**, 46-55.
- [32] Corriga G., A. Giua and G. Usai, "An Implicit Gain-Scheduling Controller for Cranes", *IEEE Trans. on Control and Systems Technology*, **6-1**, 15-20 (1998).
- [33] Tanaka S., M. Tanaka, K. Kamachi and S. Kouno, "Automatic Attitude Measurement for Crane lifters", *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, **30-12**, 1512-1520 (1994).
- [34] Kouno S., T. Toyohara, S. Tanaka and K. Kamachi, "Automatic Measurement and Control of Attitude for Crane Lifters", *Trans. of IEE Japan*, **115-D-6**, 686-693 (1995).
- [35] Tanaka S., S. Kouno and H. Hayashi, "Automatic Measurement and Control of Attitude for Crane Lifters", *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, **32-1**, 97-105 (1996).
- [36] Arimoto, S. : *Control Theory of Non-Linear Mechanical Systems, A Passive-Based and Circuit-Theoretic Approach*. Oxford University Press (1996).
- [37] Lee G.-W. and F.-T. Cheng, "Robust control of manipulators using the computed torque plus H_∞ compensation method", *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, **vol.143, no.1**, 64-72 (1996).
- [38] Namerikawa T., M. Fujita and F. Matsumura, "Robust H_∞ Control of a Parallel Link Robot Manipulator", *Transaction of IEEJ-D*, **vol.116, no.2**, 207-215 (1996). (*in Japanese*)
- [39] S.P. Boyd and C.H. Barratt : *Linear Controller Design, Limits of Performance*, Prentice-Hall, Inc. (1991).
- [40] 岩崎徹也 : *LMIと制御*, 昭晃堂 (1997).
- [41] B. d'Andrea-Novel and J.M. Coron, "Exponential stabilization of an overhead crane with flexible cable via a back-stepping approach", *Automatica*, vol.36, no.4, pp.587-593, 2000.
- [42] Z. Kang, S. Fujii, C. Zhou and K. Ogata, "Adaptive Control of a Planar Gantry Crane by the Switching of Controllers", *Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers*, vol.35, no.2, pp.253-261, 1999.
- [43] A. Marttinen and J. Virllunen, "Modeling and analysis of Trolley Crane", *Proc. of Int. ASME Conf. Modeling and Simulation*, Pomona, CA, vol.3., pp.15-26, 1987.
- [44] Y. Ohyama, T. Yamaura and J. Ikebe, "The Design of Visual Servo Controller for an Inverted Pendulum", *Preprints of 13th IFAC World Congress*, vol.G, pp.47-52, 1996.
- [45] OKK Inc. : *VIDEO TRACKER G220 Technical Manual*, 1995 (*in Japanese*).
- [46] S. Rhim and W.J. Book, "Noise Effect on Adaptive Command Shaping Methods for Flexible Manipulator Control", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 9-1, pp.84-92 (2001).
- [47] J. Virkkunen, A. Marttinen, K. Rintanen, R. Salminen, and J. Seitsonen, "Computer Control of Over-Head and Gantry Cranes", *Proc. of IFAC 11th Triennial World Congress*, Tallinn, Estonia, pp.401-405, 1990.