

Forwarding手法による 倒立振子のスウィング制御

丸木勇治

(大分高専)

岡 宏弥, 川野晃平

末光治雄, 松尾孝美

(大分大学)

アウトライン

- 背景と目的
- Forwardingとは
- 倒立振子モデル
- 振子部分システムの制御系
 - ホモクリニック軌道によるスウィング
- 台車部分システムの制御系
 - 線形則, 非線形則
- 全体の制御系
- シミュレーション, 実験結果
- まとめ

背景と目的(1)

- 難しいところ: **振り上げ & 安定化**
 - 倒立振子がフィードバック線形化できない.
 - 振子が水平面を通過するとき, 可制御性グラミアンの階数が増える.

背景と目的(2)

- 従来研究: 振り上げ & 安定化
 - エネルギー制御 (Furuta & Astrom)
 - 台車部分の線形化を行い, 台車加速度を振子系の入力とみなし, リアプノフ安定論を用いた安定性解析 (Spong, Angeli)
 - 台車と振子全体のエネルギーを扱うことによりホモクリニック軌道を用いて振り上げを行う方法を提案 (Lozanoら)
 - Lozanoらの手法では台車の振動を抑えることが難しいことを指摘. 振子系の摩擦をモデル誤差として取り扱うことで, 符号関数を入れた制御則を提案し, 同時に台車系の位置を抑制する制御則を付加. (石飛ら)

背景と目的(3)

- **台車と振子の干渉** → 台車と振子のダイナミクスで、干渉項が存在するため、台車を安定化する入力と振子を安定化する入力を加えたフィードバックでは、全体の系が不安定になることが指摘されている。
 - 摩擦のない場合に特異摂動法を用いて、振子の動特性がfast modeとして、振子ダイナミクスが台車系へフィードバックされた場合の台車位置および速度のフィードバックは、ポジティブフィードバックの場合に安定であることを導出 (Srinivasanら)
 - Forwardingによる振り上げ&安定化 (Masenc & Praly)

背景と目的(4)

- 台車と振子の干渉→我々の結果
 - 佐伯の非線形安定化制御法とそれを拡張した山川らの正值のポテンシャル関数を用いた制御法により振子の安定化を行い、同時に台車系は線形のポジティブフィードバック制御を行うことにより、全体の安定化
 - 佐伯の非線形安定化制御法の考え方を利用して、台車部分システムを線形フィードバックにより安定化し、エネルギー関数を用いて、振子部分システムをホモクリニック軌道に追従させるコントローラを設計
 - Spongらの部分線形化モデルによる振り上げ(ホモクリニック軌道追従) & 安定化 → 実験
 - ポジティブフィードバックによる台車安定化の根拠は線形化
 - リアプノフの安定論による根拠付けにしたい
 - Forwarding手法の適用

背景と目的(5)

- 本報告(1)
 - 摩擦がある場合にSpongらの部分線形化モデルを用いて、振子がホモクリニック軌道に達し、かつ台車を停止させる倒立振子制御系を構成する.
 - 台車の制御系はネガティブフィードバックになる。
 - 振子がホモクリニック軌道になることは、倒立点で一旦振子が静止し、さらに回転運動を続けることを意味している. このようなコントローラは、不安定な制御系を用いて振子の振り上げを可能にできることを示唆している.

背景と目的(6)

- 本報告(2)

- 振子の制御:ホモクリニック軌道追従

- 振子部分システムに対して, 丸木らが提案したコントローラが, 倒立点を含むホモクリニック軌道に漸近的に収束することを, 負値をもつエネルギー関数の2乗値を用いたリアプノフ関数を用いて証明する.
 - ホモクリニック軌道に収束した後は, 摩擦のない自由振動系になることを示す. 設計したコントローラは, 古田ら, 石飛らと同じエネルギー関数により導出されるが, 制御則は異なっている.

背景と目的(7)

- 本報告(3)

- 台車の制御: 安定化

- 台車の安定性を保証するために, **forwarding的な手法**を導入する.
 - 台車部分システムに対して, 1次安定システムの2乗をリアプノフ関数として定義することにより, 安定化を達成する.

背景と目的(8)

- 本報告(4)

- 結合形の台車システム安定性の保証

- 振子系のリアプノフ関数に台車系のリアプノフ関数を追加することにより, 振子と台車の相互干渉に対するフィードバック補償項を導出
 - この補償項が振子のスウィングコントローラと台車の安定化コントローラの比率を重み付けする機能
 - forwarding法と異なる点は, 振子系はホモクリニック軌道に達するだけで安定であるとは限らないこと
 - 提案したコントローラの有効性を, 計算機シミュレーションにより確認する.

Forwardingとは(1)

- **Forwarding**→Mazencら(1996)により提案された非線形制御の1手法で, Backsteppingとちょうど逆の過程をたどる段階的コントローラ設計法
- **ForwardingとBacksteppingの比較**

Forwardingとは(2)

- Backstepping法→サブシステムの仮想入力を段階的に構成し、最終的に全体のシステムの入力を求める.

$$\dot{y} = f(y, u)$$

の漸近安定性を保証する u を求め、つぎに、

$$\dot{y} = f(y, x), \quad \dot{x} = h(x, y, u)$$

が漸近安定であることを保証する u を求める.

Forwardingとは(3)

- Forwarding法 → 入力を含むサブシステムから安定化を達成し、つぎに1次元ずつシステムを追加して、安定化入力を追加していく。

$$\dot{y} = f(y, u)$$

の漸近安定性を保証する u を求め、つぎに、

$$\dot{x} = h(y, u), \quad \dot{y} = f(y, u)$$

が漸近安定であることを保証する u を求める。

Forwardingとは(4)

- Feedforward form

$$\begin{cases} \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, u) \\ \dot{x}_1 = f_1(x_1, u) \end{cases}$$

Mazencらは、 $\dot{x} = f_1(x, u)$ が局所的には指数安定で、かつ大域的漸近安定ならば、原点で線形化されたシステムの安定性が成り立つと、Feedforward formの大域的漸近安定性が保証されることを証明している。

倒立振り子モデル(1)

$$H(\theta) \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + C(\dot{\theta}) \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au \\ mgl \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix}$$

$$C(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} F & -ml\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

倒立振り子モデル(2)

新規入力(Spong,Angeli)

$$\nu_0 = \frac{1}{\det H(\theta)} \zeta_1$$

$$\zeta_1 = (J + ml^2)(-F\dot{z} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + au) - ml \cos \theta(-c\dot{\theta} + mgl \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= \nu_0 && \text{部分線形化} \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{J + ml^2} \left(-c\dot{\theta} + mgl \sin \theta - ml\nu_0 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

実際の台車に
加える入力

$$u = \frac{1}{a} \left\{ F\dot{z} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{1}{J + ml^2} \left(\det H(\theta)\nu_0 + ml \cos \theta(-c\dot{\theta} + mgl \sin \theta) \right) \right\}$$

振子部分システムの制御系(1)

$$(J + ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + c \frac{d\theta}{dt} - mgl \sin \theta = -ml \cos \theta \nu_p$$

エネルギー関数(振子のみ)

$$E(t) = \frac{1}{2} (J + ml^2) (\dot{\theta}(t))^2 + mgl(\cos \theta(t) - 1)$$

$$E(t) \geq -2mgl$$

$(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ を通る軌道に収束する, つまり,

$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ となる入力 ν_p を設計する.

ホモクリニック軌道

振子部分システムの制御系(2)

リアプノフ関数1

$$V_p(t) = \frac{1}{2}E^2(t)$$

$$\dot{V}_p = E\dot{E} = -E(c\dot{\theta}^2 + (ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_p(t))$$

$$(ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_p(t) = -c\dot{\theta}^2 + \gamma E(t)$$

$$\dot{V}_p(t) = -\gamma E^2(t) = -2\gamma V_p(t)$$

$$(ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_p(t) = -c\dot{\theta}^2 + \gamma \left\{ \frac{1}{2}(J + ml^2)(\dot{\theta}(t))^2 + mgl(\cos \theta(t) - 1) \right\}$$

$$(ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_p(t) = \left(\frac{\gamma}{2}(J + ml^2) - c \right) \dot{\theta}^2 + \gamma mgl(\cos \theta(t) - 1)$$

振子部分システムの制御系(3)

$$\nu_p = \frac{1}{ml\dot{\theta} \cos \theta} \psi(\theta(t), \dot{\theta}(t))$$

$$\psi(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = \gamma mgl(\cos \theta(t) - 1) + \left(\frac{\gamma}{2}(J + ml^2) - c \right) \dot{\theta}^2$$

$$E(t) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_p \rightarrow \frac{-c\dot{\theta}}{ml \cos \theta}$$



$$(J + ml^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} - mgl \sin \theta = 0$$

自由振動系

振子部分システムの制御系(4)

ゼロ割回避と入力飽和

$$\nu_p = \text{sat}_{U_m} \left(\text{sat}_{U_d} \left(\frac{1}{ml\dot{\theta} \cos \theta} \right) \psi(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \right)$$
$$\text{sat}_{U_0}(\nu) = \begin{cases} U_0 & \nu > U_0 \\ \nu & |\nu| \leq U_0 \\ -U_0 & \nu < -U_0 \end{cases}$$

台車部分システムの制御系:線形

$$\ddot{z} = \nu_c$$

リアプノフ関数2 $V_c = \frac{\delta}{2}(\dot{z}(t) + \lambda z(t))^2$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \delta(\dot{z} + \lambda z)(\ddot{z} + \lambda\dot{z}) \\ &= \delta(\dot{z} + \lambda z)(\nu_c + \lambda\dot{z})\end{aligned}$$

$$\nu_c = -(1 + \lambda)\dot{z} - \lambda z$$

$$\dot{V}_c = -\delta(\dot{z}(t) + \lambda z(t))^2 = -2V_c$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_c = 0$$

台車部分システムの制御系：非線形

$$\ddot{z} = \nu_c$$

リアプノフ関数2'

$$V_c = \frac{\delta}{2} (\dot{z}(t) + \lambda z^3(t))^2$$

$$\nu_c = -(\beta + 3\lambda z^2)\dot{z} - \beta\lambda z^3$$

$$\dot{V}_c = -\beta\delta(\dot{z}(t) + \lambda z^3(t))^2 = -2\beta V_c$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_c = 0$$

全体の制御系(1)

$$\nu_0 = \nu_p + \nu_c + \nu_s$$

ν_p 振子の制御入力

ν_c 台車の制御入力

ν_s 振子と台車の相互干渉を補償する制御入力

リアプノフ関数3 $V(t) = V_p(t) + V_c(t)$

全体の制御系(2)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= E\dot{E} + \delta(\dot{z} + \lambda z)(\ddot{z} + \lambda\dot{z}) \\ &= -E(c\dot{\theta} + (ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_0) + \delta(\dot{z} + \lambda z)(\nu_0 + \lambda\dot{z}) \\ &= -\gamma E^2 - \delta(\dot{z} + \lambda z)^2 \\ &\quad - E(ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_c - E(ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_s \\ &\quad + \delta(\dot{z} + \lambda z)\nu_p + \delta(\dot{z} + \lambda z)\nu_s \\ &= -\gamma E^2 - \delta(\dot{z} + \lambda z)^2 \\ &\quad - E(ml\dot{\theta} \cos \theta)\nu_c + \delta(\dot{z} + \lambda z)\nu_p \\ &\quad + \{\delta(\dot{z} + \lambda z) - E(ml\dot{\theta} \cos \theta)\}\nu_s\end{aligned}$$

全体の制御系(3)

$$\{E(ml\dot{\theta} \cos \theta) - \delta(\dot{z} + \lambda z)\} \nu_s = -E(ml\dot{\theta} \cos \theta) \nu_c + \delta(\dot{z} + \lambda z) \nu_p$$

$$\dot{V} = -\gamma E^2 - \gamma(\dot{z} + \lambda z)^2 = -2V$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$$

ホモクリニック軌道追従

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{z}(t) + \lambda z(t)) = 0$$

台車安定化

ゼロ割回避と入力飽和

$$\begin{aligned} \nu_s &= \text{sat}_{U_s} \left(q(-E(ml\dot{\theta} \cos \theta) \nu_c + \delta(\dot{z} + \lambda z) \nu_p) \right) \\ q &= \text{sat}_{U_d} \left(\frac{1}{E(ml\dot{\theta} \cos \theta) - \delta(\dot{z} + \lambda z)} \right) \end{aligned}$$

全体の制御系(4)

$$\{E(ml\dot{\theta} \cos \theta) - \delta(\dot{z} + \lambda z)\} \nu_s = -E(ml\dot{\theta} \cos \theta) \nu_c + \delta(\dot{z} + \lambda z) \nu_p$$



ゼロ割回避と入力飽和

$$\begin{aligned} \nu_s &= \text{sat}_{U_s} \left(q(-E(ml\dot{\theta} \cos \theta) \nu_c + \delta(\dot{z} + \lambda z) \nu_p) \right) \\ q &= \text{sat}_{U_d} \left(\frac{1}{E(ml\dot{\theta} \cos \theta) - \delta(\dot{z} + \lambda z)} \right) \end{aligned}$$

補償項

→振子のスウィングコントローラと台車の安定化コントローラの比率を重み付けする機能

シミュレーション

Table 1: Physical parameters

サーボテクノ製倒立振子

M [kg]	0.15	F [kg/s]	40.27
l [m]	0.2	m [kg]	0.023
J [kgm ²]	3.20×10^{-4}	c [kgm ² /s]	2.74×10^{-5}
a [N/V]	25.73		

コントローラパラメータ

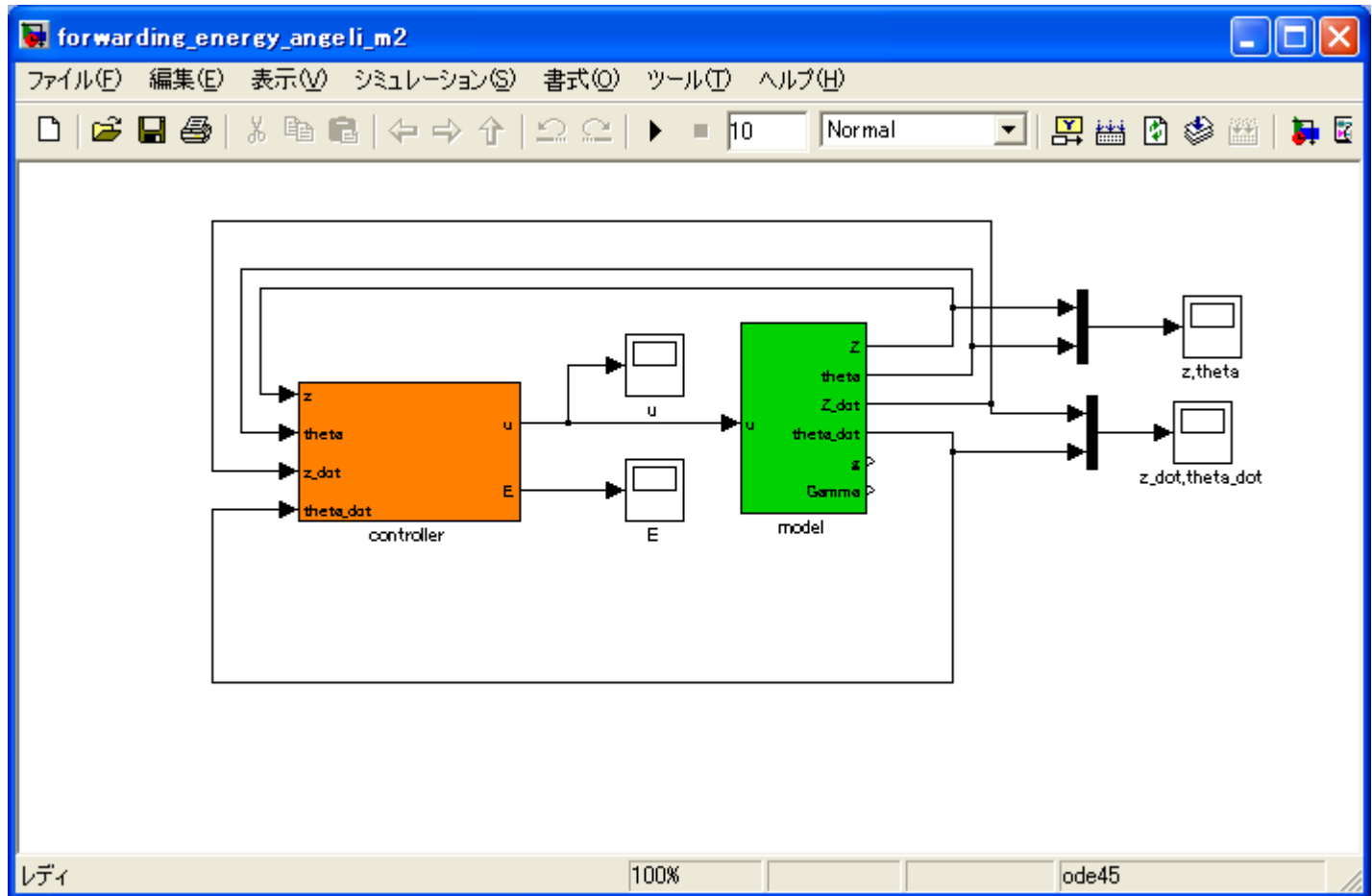
$$\gamma = 340, \lambda = 10, \delta = 0.002$$

$$U_m = 100, U_s = 100, U_d = 100$$

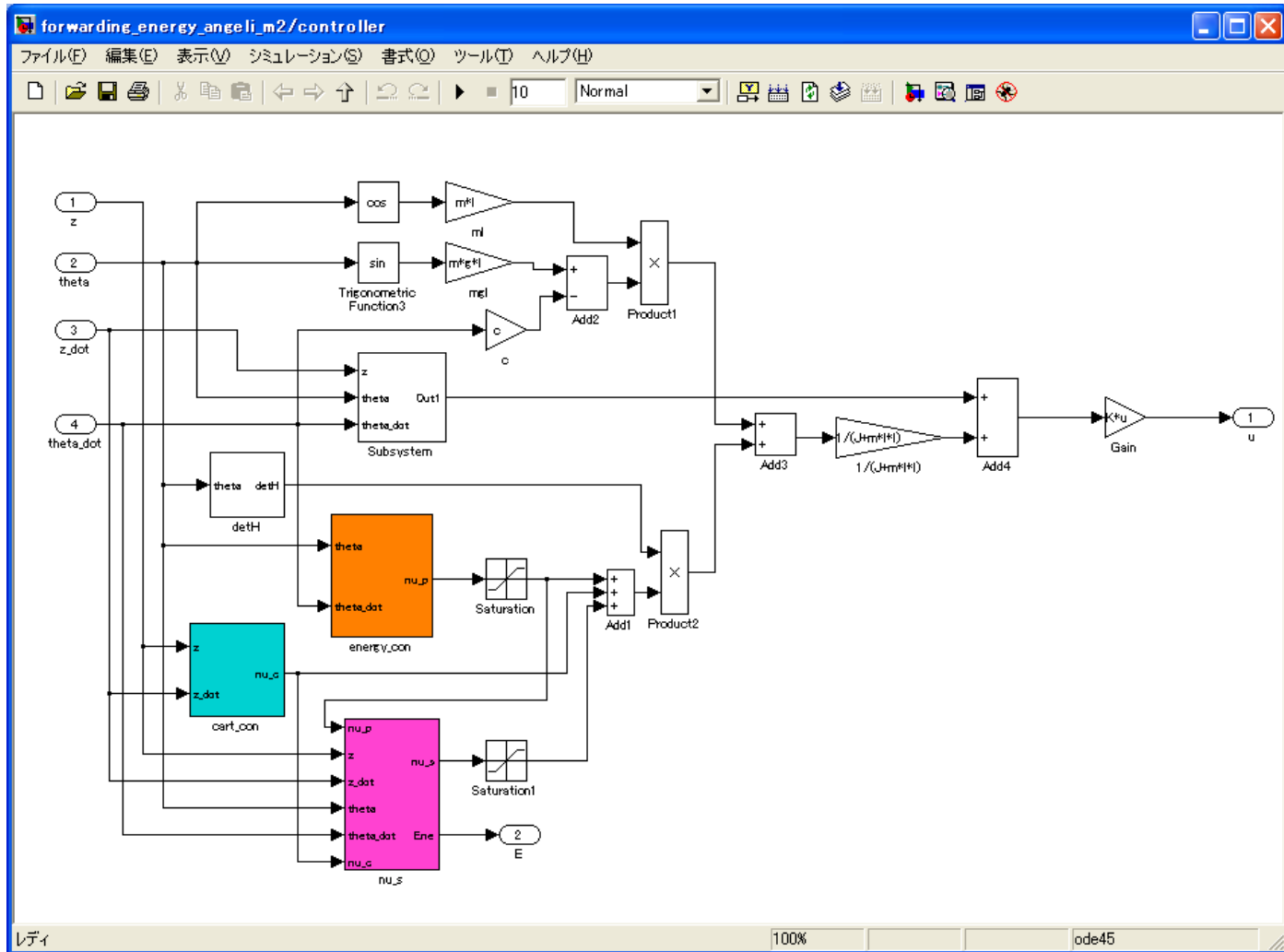
初期条件

$$\theta(0) = \pi, \dot{\theta}(0) = 0, z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0.$$

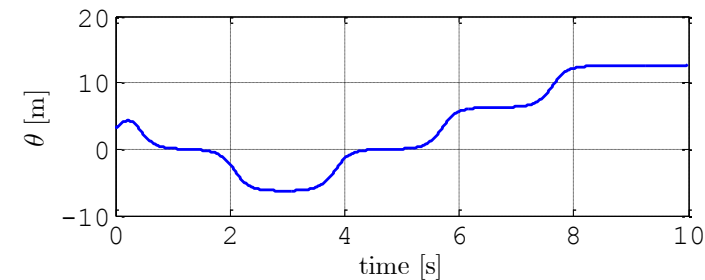
Simulink



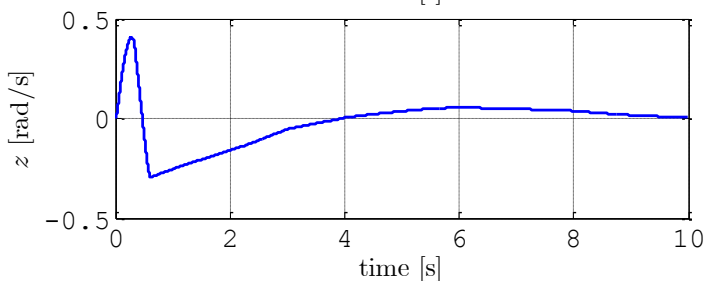
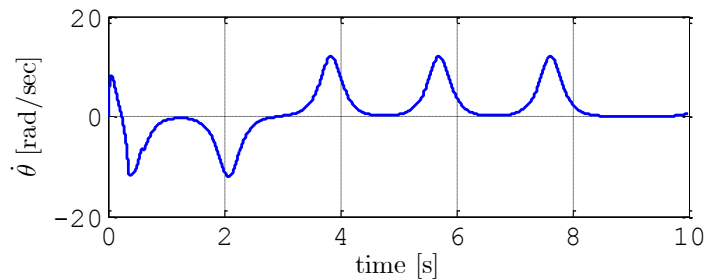
Simulink



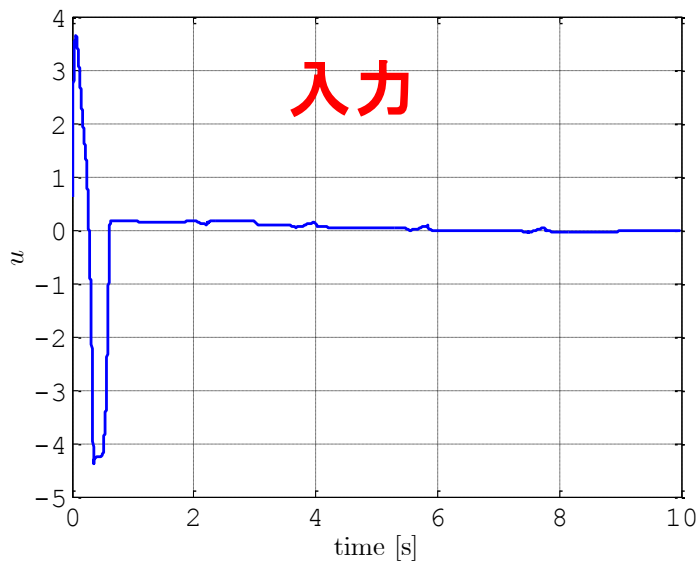
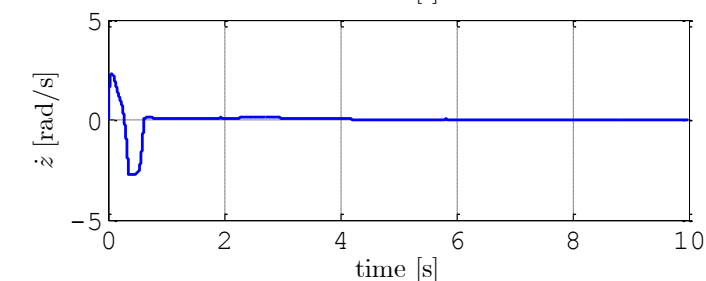
応答波形



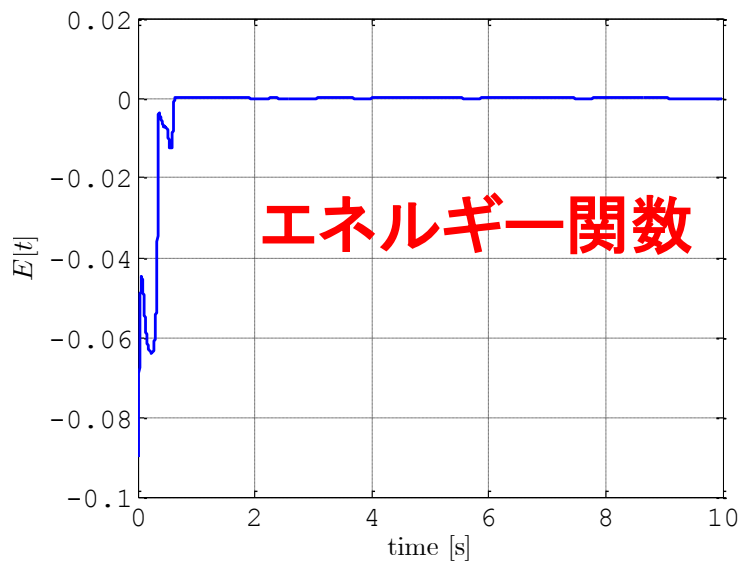
振子



台車

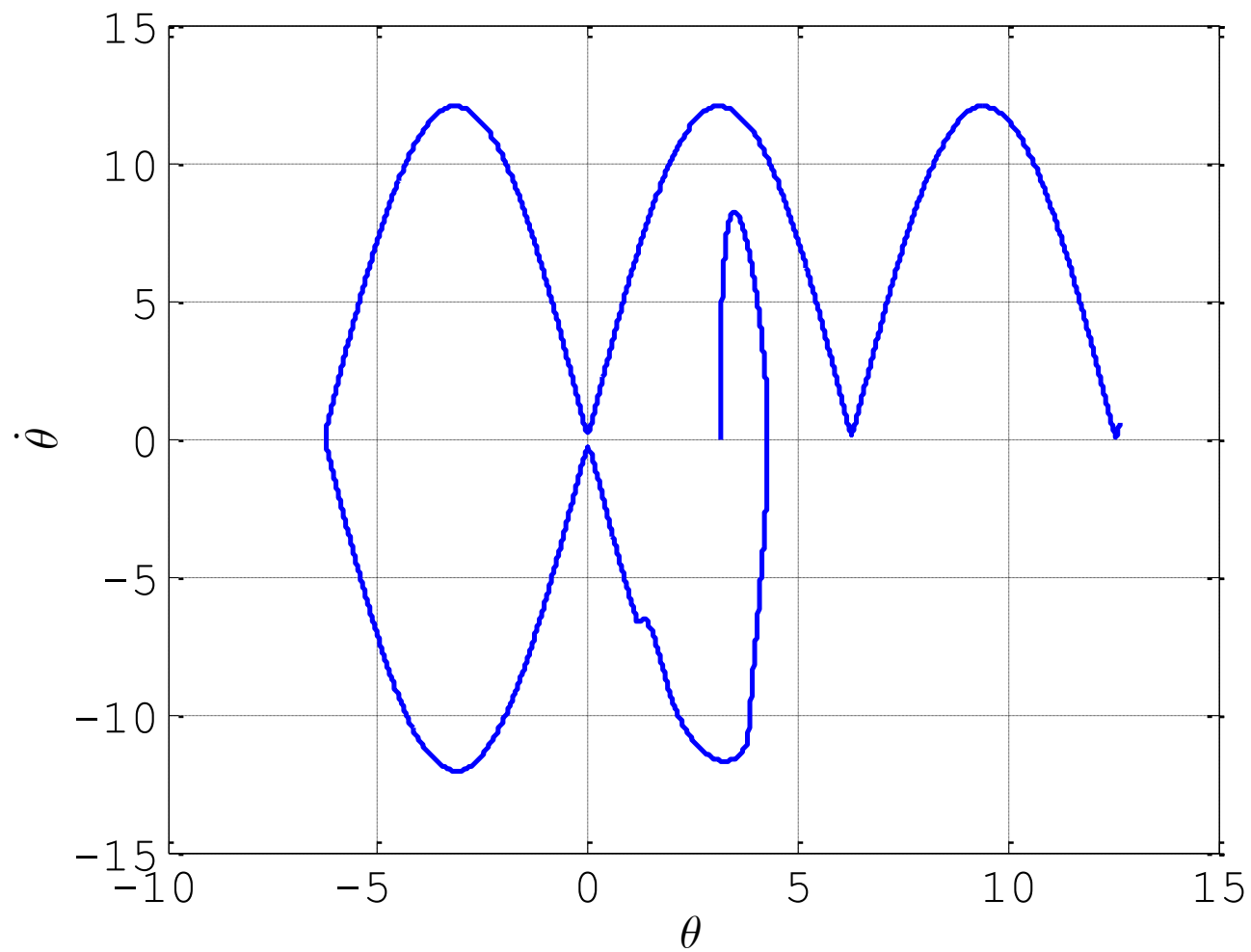


入力



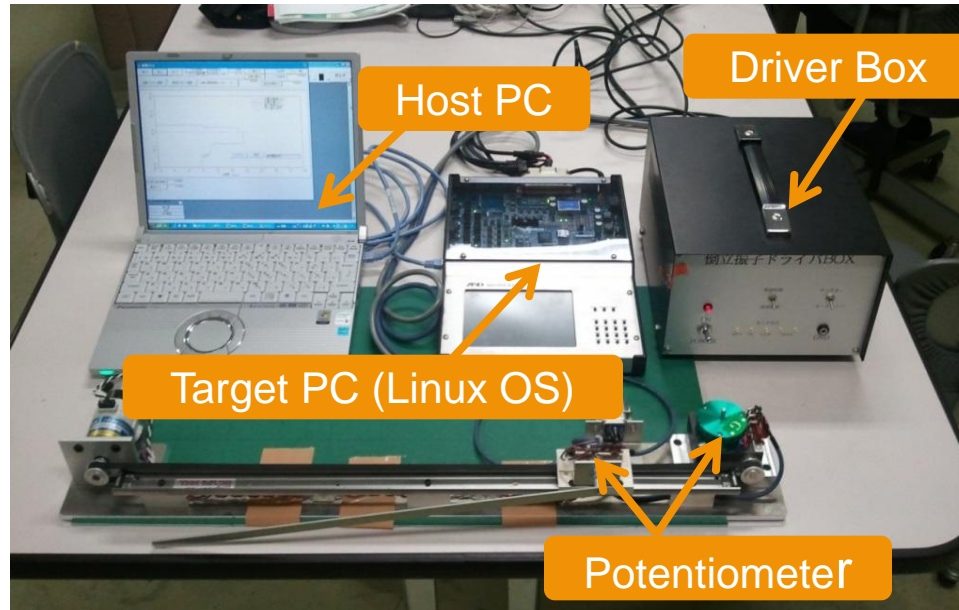
エネルギー関数

位相面図



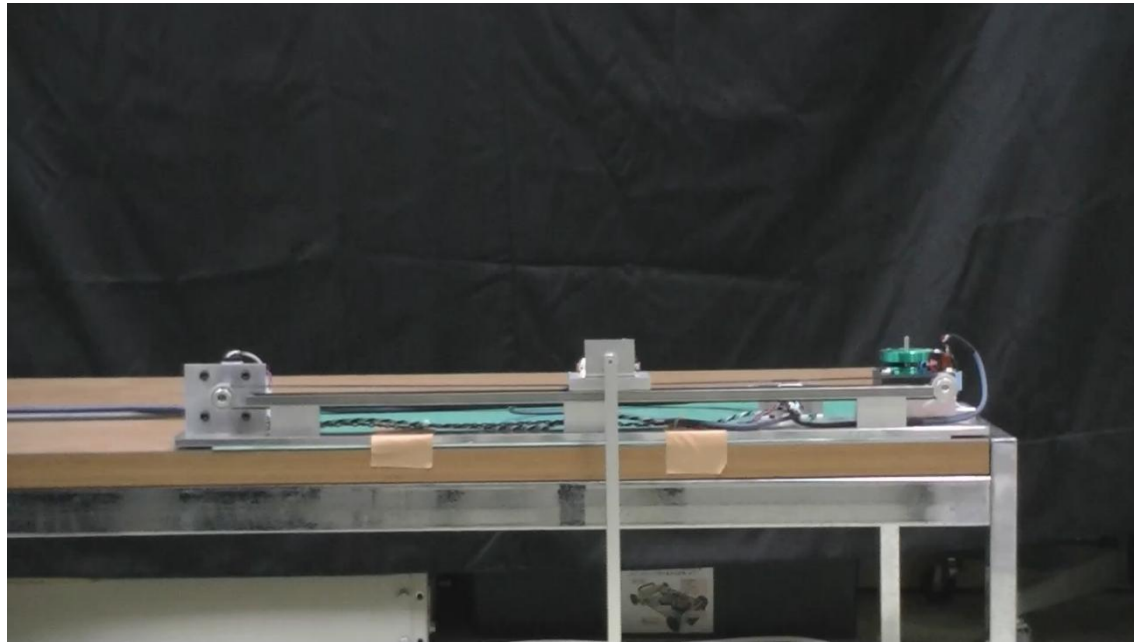
実験装置

- Experimental apparatus (A&D and ServoTechno)

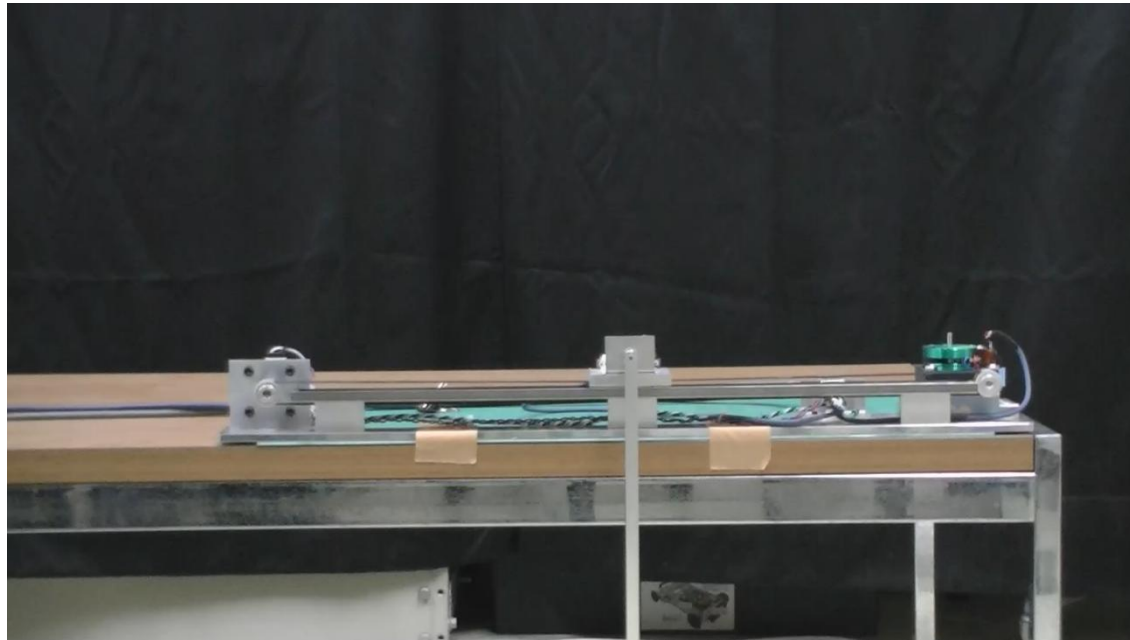


**ARM11コア搭載Linuxコンピュータ
AD7011-EVA**

台車安定化：線形フィードバック



台車安定化：非線形フィードバック



まとめ

- 台車変位の加速度を仮想入力として変形した制御系に対して、振子に対してはホモクリニック軌道に収束するコントローラを、台車に対しては原点に収束するコントローラを別々に設計し、最後にforwarding的手法を用い、両者の干渉を補償するコントローラを追加することにより全体のコントローラを設計した。
- 提案手法の有効性をシミュレーションと実験により確認した。
- 今後の課題は、コントローラにゼロ割が発生する場合があるので、それを回避する構成を導出することと、実機での検証である。